高等数学读书方法论

江莪茜 C13-4
(重庆建筑高等专科学校计算机系 重庆 400030)

摘要 高等数学是重要的基础理论课和先行课。高等数学课程除了让学生获得基本知识、基本理论和基本运算技能外，还要通过各教学环节逐步培养学生具有较熟练的运算、抽象思维、逻辑推理、空间想象以及自我培训能力。为此，教师应注重渗透性素质教育、训练学生较强的读书能力，提高学生数学素质。

关键词 高等数学 素质教育 数学素质 读书方法 ，高等学
中图分类号 G642 **文献标识码** A **文章编号** 1008-5831(2000)01-0092-03

On Reading Methods of Higher Mathematics

JIANG E-xi
(*Department of Computer, Chongqing Architectural College, Chongqing 400030, China*)

Abstract Higher Mathematics is an important basic theoretical course. Through a lot of teaching links, Higher Mathematics should make students acquire basic knowledge, theories and calculating skills, and therefore gradually train students to have more proficient calculating capacity, abstract thinking capacity, logical reasoning capacity, space imagination capacity and selftraining capacity. For this purpose, teachers should lay more stress on infiltrating quality instruction and training students' reading capacity to increase their mathematics quality.

Key Words Higher Mathematics quality instruction mathematics quality reading methods

爱因斯坦曾说过：仅用专业知识教育人是不够的，通过专业知识教育，他可以成为一个有用的工具，但不能成为和谐发展的人。当今世界，科学技术突飞猛进，不同学科不同专业领域相互交叉、渗透和融合日趋明显。全面推进素质教育，培养全面发展的人的教育思想应运而生。转变教育观念，提高大学生的数学素质，是大学生素质教育的重要方面[①②]。素质教育包括传授知识和培养能力，并非只学习一些具体知识和技能，强调将知识"内化"为做人做事的基本心理品质。著名物理学家劳厄说：重要的不是获得知识，而是发展思维能力。高等数学是一门重要的基础理论课和先行课，在传授知识、培养学生能力和素质教育方面肩负特殊使命。高等数学课程除让学生获得基本知识、基本理论和基本运算技能外，还要通过教学环节逐步培养学生较熟练的运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及自我培训能力。

学好高等数学，学生除应具备较好的数学基础和良好的学习习惯外，教师应在教学过程中注重强化学生的读书能力，通过课堂教学和对学生读书方法的指导，不断进行渗透性数学素质教育，以提高学生独立获取知识和信息的能力，为其今后立足社会奠定良好基础。读书能力是提高学生数学素质的重要方面。教师可根据高等数学的特点(高度的抽象性、严密的逻辑性、语言符号性、内容的辩证性、应用的广泛性)，指导学生总结科学、有效的读书方法。

一、定义例子对照读

高等数学具有高度的抽象性。因此，一般高等数学教材在介绍基本概念时大致有两种方式：(1) 先介绍引例，再抽去其实际背景，抽象出数学框架的共性，给出纯数学定义。如导数和定积分的定义即如此。(2) 先给出数学定义，再举例解释。如不定积分的定义引入即如此。不论以何种方式引入定义，都应把定义和例子对照思考。定义一般较抽象，用词很简练，对照例子读有助于深入理解定义内容。例如《高等数学》(上册)[③]对原函数的定义及举例：定义 已知 $f(x)$ 是一个定义在某区间内的函数，如果存在函数 $F(x)$，使得在该区间内的任何一点都有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，那么在该区间内就称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数。举例 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数；$\ln x$ 是 $1/x$ 的原函数；$\mathrm{sh}x$ 是 $\mathrm{ch}x$ 的原函数。对照定义和例子可知，"某区间"既可以是 $f(x)$ 的整个定义区间，也可能是 $f(x)$ 定义区间的某个子区间。

定义例子对照读，有时会发现定义与例子有不尽相符之

收稿日期：1999-12-31
作者简介：江莪茜(1956-)，女，重庆人，重庆建筑高等专科学校讲师，主要从事高等数学教学法研究。

处，这便会激发学生的求知欲，促使其思索、钻研，此时教师适时引导，便可将提高学生数学素质的目的无形地渗透于教学之中。例如《高等数学讲义》（下册）[4]对二元函数的极限定义及与之配套的《高等数学习题集》[5]的练习题目：定义　设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内是有定义的（在 P_0 函数可以没有定义，因为不考虑在该点的函数值）、$p(x,y)$ 是邻域内的任意一点，如果当点 p 以任何方式无限接近于点 P_0 时，函数的对应值 $f(x,y)$ 无限接近于一个定数 A，就说数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 或 $p \to 0$ 时的极限。此定义要求函数 $z = f(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，即函数 $z = f(x,y)$ 在该去心邻域内要处处有定义。但《高等数学习题集》20.23～20.27 题（除 20.26 题外），所给函数在原点 O(0,0) 的某一去心邻域就非处处有定义，即不满足定义条件，但这些题目的极限却都存在。这时，教师可指导学生查阅参考书的有关部分，提高学生的自我培训能力。

二、条件结论紧扣读

任何定义都由条件和结论两部分构成，有的定理条件不止一个，各条件的综合是结论成立的保证。阅读定理时，首先应清楚每个条件所起的作用，然后仔细阅读证明过程。同时还应认真思考定理条件及结论的几何形象，并思考若某个条件不具备（或被削弱）时对结论有何影响，并拟出反例验证。证明一个命题必须经逻辑论证，推翻一个命题只需举一反例，这是数学中常见的思维方式。如 Lagrange 微分中值定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内具有导数，那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a < \xi < b)$，使等式 $f(a) - f(b) = (b-a)f'(\xi)$ 成立。若定理的两个条件至少之一被破坏时，对结论有何影响？为加深学生对定理的理解，举反例说明定理条件缺一不可：$f(x) = |x|, x \in [-a,a], (a > 0)$，本例条件 2 被破坏；$f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$，$x \in [-1,1]$，本例条件 1 被破坏。$f(x)$ 在所论区间内都找不到使结论成立的点 ξ。

此外，对有些定理的证明方法，往往有学生会提出“我怎么没想到呢？”这正是学生认真思索的表现，也正是教师培养学生能力，指导学生认真读书，提高学生数学素质的最好时机。事实上，定理的逻辑论证总是先经过探索，提出证明计划，然后执行计划，写出证明细节。前半段为探索过程，后半段为综合过程。现代美国数学家 G. Polya 称前半段为脑力劳动，后半段为体力劳动，可见前半段远比后半段困难。由于高等数学教科书上很少写出证明方法的探索过程，教师应特别注重引导学生探索，开拓学生思路。例如，学生往往对引用辅助函数证明 Lagrange 微分中值定理感到困惑，其实，这种论证方式是用初等数学引伸而来。在几何学中证明定理或命题，有时需作辅助线；求解代数方程时，有时需引人辅助未知数等等。引用辅助函数则是作辅助线和引入辅助未知数的发展，是一种“温故而知新”的思维方法。

三、前后内容连贯读

高等数学体系结构紧密，前面内容是后面内容的基础。一开始就必须认真仔细思索字里行间的内容，读到新内容时，应联想前面的相关内容，提取相关信息，不仅有助于知识的系统化、而且是对前面知识的巩固和深化。数学就是在人们的联想和猜想中不断发展。

比如学习导数概念时，与极限概念联想，可从中体会到极限是贯穿微积分的一条“红线”，是高等数学的基本概念和重要工具。连续、定积分、广义积分的概念等也与极限概念紧密相关。又如 L' Hospital Rule 是由导数的应用引出的一种计算函数极限的方法，读书时如果联想到已学过的有关内容，结合例题和习题的类型，可归纳总结出十几种计算函数极限的方法：(1) 利用极限的四则运算法则；(2) 约去无穷小法；(3) 弃去无穷小法；(4) 自然数求和法；(5) 有理化分子分母法；(6) 变量替换法；(7) 利用初等函数的连续性法；(8) 无穷小倒置法；(9) 利用有界函数乘以无穷小仍为无穷小的性质法；(10) 利用两个重要极限法；(11) 等价无穷小代换法；(12) 利用夹逼定理法；(13) 利用 L' Hospital 法则等等。经过整理，计算极限方法豁然清晰，提高了计算极限的能力，也强化了归纳总结方面的数学素质。再如学习二元函数的全微分时，若回顾到一元函数的微分及其逆运算不定积分，自然会联想到：如果已知 $p(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 是某函数 $z = f(x,y)$ 的全微分，如何求此函数？此时虽然还找不到求函数 $z = f(x,y)$ 的一般公式（这个公式在曲线积分中才介绍），但对某些简单的全微分式，用“凑全微分法”可以找到函数 $z = f(x,y)$。

四、逻辑关系联想读

数学是应用逻辑的典范。有人将逻辑证明比喻为数学的“科学实验”非常形象。高等数学的定理均用逻辑论证方式证明（除个别定理证明超出范围外），体现了严密的逻辑性。

阅读高等数学时，应经常联系已掌握的逻辑知识。当某一定理成立时，立即联想其逆定理、否定理、逆否定理等相关问题。“举一反三”是自我培养数学素质的较好方法。当正定理成立时，其逆否定理一定成立，一般用反证法易证明逆否定理成立。有时书上没明确写出定理之间的逻辑关系，读书时应首先理清其关系，以便掌握其内在联系。例如，关于函数极限的保号性有下列两个定理[1]：定理 1　如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而且 $A > 0$（或 $A < 0$），那末就存在着点 x_0 的某一邻域，当 x 在该邻域内，且 $x \neq x_0$ 时，有 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$。定理 2　如果 $f(x) \geqslant 0$ 或 $f(x) \leqslant 0$，而且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而且 $A \geqslant 0$ 或 $A \leqslant 0$。稍加整理，可明显看出其间的逻辑关系。在 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，的条件下，定理 1 说明，若 A 为正（或 A 为负），则 $f(x)$ 亦为正（或亦为负）（$x \in N(x_0,\xi)$，且 $x \neq x_0$）；定理 2 说明，若 $f(x)$ 为非负（或为非正），则 A 亦为非负（或为非正）。显然，定理 2 是定理 1 的逆否命题。联系起来读，就不会感到这两个定理孤立，对极限的保号性也会记得很清楚。

五、符号含义统一读

全面系统使用符号是高等数学的又一显著特点。数学符

号就是数学的语言,如果不懂数学语言,不能准确使用数学符号,就难以学好高等数学。因此,读书时应清楚理解各符号及其所代表的含义,否则就会越读越糊涂,甚至丧失信心。

以函数极限的"$\varepsilon-\xi$"语言为例,它是"函数 $f(x)$ 与定数A之间的距离要好近有好近"的数量化描述,其中小正数 ε 代表 $f(x)$ 与定数A的接近程度,"$\forall\varepsilon>0$"即是任意规定一个接近程度,这样读就不会感到函数极限的定义很难懂,也不会认为 ε 是一个深不可测的怪数。

此外,高等数学还经常采用符号叙述定义、定理及进行逻辑论证,记住每个符号的含义非常重要。比如函数极限与无穷小的关系有一个重要定理:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,(其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$)。定理括号中的极限式就是符号 α 的含义,即"α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小"。若读书时不仔细推敲,囫囵吞枣,就会造成论证上的原则错误。对此类错误,教师应及时纠正,并指导学生深入读书,深入理解所读内容及数学符号的实质含义。

六、辩证观点指导读

用对立统一观点观察高等数学,容易发现处处有典型而深刻的矛盾辩证法。在微积分中,除自始至终贯穿着微分与积分的矛盾外,还有常数与变数、有限与无限、连续与间断、直曲、均匀与不均匀的矛盾……因此,阅读时若能以辩证法的基本观点为指导,就能更深刻地领会其实质。

比如引入定积分概念前,读到引例"求曲边梯形的面积"时,就应以矛盾运动发展的观点理解其分析过程:(1)解决因有一条曲边而引起不会计算的矛盾——通过分割底边并用以直代曲的方法,达到由不会计算到能够计算出其近似值;(2)解决近似程度不高的矛盾——通过把底边越分越细的方法,使近似程度越来越高;(3)解决由近似到精确的矛盾——通过取极限由有限过渡到无限的方法,得出其精确值。求曲边梯形面积的步骤构成一个矛盾运动的有机整体,从而思路清晰,许多相似问题就能迎刃而解。

又如求解 Euler 方程:$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+p_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\cdots\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$ (其中 p_1,$p_2\cdots\cdots p_{n-1}$,p_n 是常数)。可作代换 $x=e^t$(即 $t=\ln x$),便可将Euler方程转化成常数线性微分方程求解。代换式是怎样找到的呢?运用"具体问题具体分析"的辩证思想方法,首先观察方程左边各项结构:$y^{(k)}(k=1,2\cdots\cdots,n-1)$ 的系数中除含常数因子 P_{n-k} 外,还含因子 x^k,如能设法消去此因子,就可达到变方程为常系数线性微分方程的目的。然后可剖析方程左边倒数第二项:假设 $X\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$ 则 $dt=\frac{dx}{x}$,故有 $t=lnx$ 即 $x=e^t$。用此代换式检验其它各项,均能消除 x^k 因子。

指导读书方法,注重培养学生独立获取知识和信息的能力,是大学素质教育的重要方面。中科院院士北大教授姜伯驹在谈到教学改革时说:在数学系以外,数学常常被看成服务性课程,只教其它课程要用到的数学知识,只教给学生一些计算方法。我们要反思数学教育的指导思想,要着眼于学生的将来,学生的适应性、竞争能力和潜力,努力提高大学生的数学修养(或者说数学素质)。学生在大学阶段不仅要接受已知的事物,掌握已经被证实的真理,更重要的是要学会自我培训的方法③。因此,针对教学过程各环节特点有意识地对学生进行渗透性素质教育和培养数学素质尤为必要。

注释

① 江泽民.在庆祝北京大学建校一百周年大会上的讲话[A].面向二十一世纪教育思想教育观念讨论资料汇编[C].重庆:重庆市高教工委会,重庆市教委,1998.10—12.

② 全面推进素质教育 开创教育振兴的新纪元——祝贺第三次全国教育工作会议胜利闭幕[A].第三次全国教育工作会议文件选编[C].重庆:重庆市高教工委会、重庆市教委,1999.73—76.

③ 同济大学数学教研室.高等数学(上册)[M].北京:人民教育出版社,1982.230—232,164,43—44.

④ 樊映川等.高等数学讲义(下册)[M].北京:人民教育出版社,1978.73.

⑤ 同济大学数学教研室.高等数学学习题集[M].北京:人民教育出版社,1978.151.