

基金管理人变动资产组合的 Markowitz 模型分析

幸昆仑,周小军,陈 荣

(重庆大学 工商管理学院,重庆 400044)

摘要:现代资产组合理论研究的是投资者在权衡收益与风险的基础上最大化自身效用的方法以及由此对整个资本市场产生的影响。Markowitz 模型假设条件太多,因而基金管理人变动资产组合时,在证券市场上进行应用较困难。本文在对 Markowitz 创立的资产组合模型进行介绍的基础上,力图对 Markowitz 的资产组合模型进行拓展,建立了考虑税收、交易成本的资产组合模型,并分析了含有税收的证券组合的有效边界。

关键词:基金管理人;税收;交易成本;资产组合;有效边界;凸分析

中图分类号:F019 **文献标识码:**A **文章编号:**1008-5831(2002)01-0022-03

Markowitz Model Analysis of Fund Manager Changing Portfolio

XIN Kun-lun, ZHOU Xiao-jun, CHEN Rong

(College of Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Modern property theory studies the investors maximizing their utilities on measuring return and risk and affecting the whole capital market. Markowitz model has many provisional conditions, and so application of fund manager changing portfolio, on negotiable securities market is very difficult. On the basis of introducing Markowitz model, this paper tries to extend it. And then it constructs a model including tax and trade cost, and analyzes the efficient confine of negotiable securities.

Key words: fund manager; tax; trade cost; portfolio; efficient confine; protruding analysis

1952年, H. M. Markowitz 在《Journal of Finance》上发表了“资产选择:投资的有效分散化”,奠定了资产组合的理论基础,从而推动了基金企业的发展。Markowitz 最早采用风险资产的期望收益率和用方差(标准差)代表的风险研究资产的选择和组合。Markowitz 的证券组合投资模型解决了持有有一定数量资本的投资者,怎样在选定的多种风险证券投资上分配投资量,从而达到分散风险,取得尽可能大的收益的投资问题。Markowitz 模型的先天不足就是假设条件过多,不能很好地应用。它假设投资组合不涉及税收,没有考虑证券组合投资过程的交易费用,而税收、交易费用是组合管理不可忽视的问题,忽略税收、交易费用会导致投资组合无效。比如基金公司在投资组合变动过程中,频繁的组合变动会使交易成本变大,基金管理人在决定变动组合时需要不断考虑在风险不变的情况下如何使新的决策所带来的

收益大于成本或利润不变的情况下风险变小,新的决策使基金管理人不得不考虑交易成本。因而,含有税收、交易费用的证券组合投资已经引起了广泛注意。另外,此模型还假设投资者决策时仅挣有一定数量的资本金,而不持有任何证券。实际进行组合投资决策时,投资者往往已经持有有一定数量的证券。投资者进行投资决策,就是重新调整各风险证券的持有量。

本文引进上面提到的两种情况,将 Markowitz 的证券组合模型进行了拓展,建立了考虑交易费用的证券组合投资模型,并分析了含有交易费用的证券组合有效边界的性质。

一、Markowitz 资产组合概念及特点

(一) Markowitz 资产组合的概念

现代资产组合的理论含义分为狭义和广义。狭义的资产组合理论主要是 Markowitz 的资产组合理论

• 收稿日期:2001-05-21

作者简介:幸昆仑(1969-),男,重庆人,重庆大学工商管理学院讲师,硕士,主要从事国际投资及现代物流管理研究。

论。它是帮助投资者从若干种可供选择的证券中挑选若干种证券,加以有效组合的理论和办法。各种风险水平下收益最大的组合被称为有效组合,所有有效组合的集合是投资机会的有效边界。

投资者在选择证券时,必须首先考虑预期收益率和预期风险。Markowitz 假定,投资者总是在一定预期收益或一定风险水平下,使风险最小或收益最大化。Markowitz 同时指出:由于各种证券收益公司的相关性,使得只要证券之间不存在完全正相关就可以利用组合投资降低风险。

(二) Markowitz 投资组合模型

Markowitz 模型理论二阶段:首先区分有效资产和无效资产,也就是确定有效资产边界。然后采用 E- σ 确定最优投资组合。投资者确定了期望收益率和方差后,即可通过下面的模型确定投资组合决策。

$$M1: \begin{cases} \min \sigma^2 = X^T \Omega X \\ s. t. AX = B \end{cases} \quad (1)$$

$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ 为投资者对 n 种选定的证券投资的比例系数向量, E 为 n 种证券协方差矩阵, $A = (F, R)^T$, F 为元素全为 1 的 n 维向量, $R = (R_1, R_2, R_3, \dots, R_n)^T$ 为 n 种证券预期收益率向量, $B = (1, \bar{R})^T$, \bar{R} 为投资组合的预期收益。

(三) Markowitz 投资组合模型的特点

期望效用 Markowitz 的资产组合理论在投资目标上用期望效用代替了传统的期望收益原则。传统的期望收益认为投资者投资时是为了收益最大化。期望收益准则把效用水平、风险和资产的收益结合。在选择资产组合时选用相对较高的效用水平。期望效用实质上暗含投资者是风险规避者。

采用 E- σ 研究资产组合模型 Markowitz 模型采用 E- σ 方法研究资产组合,采用该模型的前提条件较多,比如:既然采用期望收益率和方差就必然涉及到收益率服从正态分布。这个假设是可以实现的,因为投资组合的计划调整期在一个月以内,股票价格的波动是有限的,因而股票收益服从正态分布具有一定的合理性。如果投资期过长,在中国快速发展且非理性的市场将会不适用,中国目前的市场效率为弱式有效。同时 Markowitz 模型不考虑交易费用和税收。

二、考虑税收、交易费用的证券投资组合模型

在我国证券交易仅交印花税 t , 不征所得税。因而交易费用主要为佣金,在此不考虑出价与要价的差额和价格的影响。由于佣金与印花税变动的方向

一致,因而与印花税合二为一,为交易成本 c 。基金管理人在变动资产组合时,已经拥有一定量的证券。在变动组合投资时主要考虑的是交易成本,在此笔者假设基金管理人已经选定的 n 种风险证券,其中的第 i 种风险证券的系数为 $y_i, i = 1, 2, \dots, n$, 同时令 x_i 表示基金管理人变动资产组合的第 i 种风险证券的投资系数。资金总额为 Z , 变动额为 ΔZ 。因此第 i 种证券的交易量为 $|Z_{y_i} - (Z + \Delta z)x_i|$, 基金管理人变动资产组合无非以下几种情况:在原有的资产上加大投入、减少投入和不变动。由于中国的证券市场盘子比较小,因而在变动组合时考虑资金规模对股价的影响,变动股票时宜采用温和的方式。

第 i 种证券的交易成本为:

$$c_i |Z_{y_i} - (Z + \Delta z)x_i| \quad (2)$$

则全部交易成本:

$$C = \sum_{i=1}^n c_i |Z_{y_i} - (Z + \Delta z)x_i| \quad (3)$$

基金管理人在变动资产组合时要同时考虑变动所带来的收益和风险。必须在更高的期望效用,即风险不变,收益应该更高;收益不变,风险更低。变动证券组合带来的收益、风险为:

$$\begin{cases} R = \bar{r}x - c_i |Z_{y_i} - (Z + \Delta z)x_i| \\ \sigma^2 = x^T \Omega x \end{cases} \quad (4)$$

其中: R ——基金管理人变动资产组合;

r ——变动后风险证券随机回报向量;

σ ——证券组合的风险;

Ω ——证券组合收益的协方差矩阵,且 Ω 为非退化的。

中国开放基金的推行,因开放型基金的赎回机制,资金数量具有很大的不确定性。

$$\text{或} \begin{cases} F^T(Z + \Delta z)X \leq F^TZY \\ F^T(Z + \Delta z)X > F^TZY \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

为了讨论的方便,记为:

$$\begin{cases} f(x) = x^T \Omega x \\ g(x) = \bar{r}x - C \\ X = \{x : x \in R^n, x \geq 0, F^T(Z + \Delta z)x \leq F^T Zx\} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{或} \begin{cases} f(x) = x^T \Omega x \\ g(x) = \bar{r}x - C \\ X = \{x : x \in R^n, x \geq 0, F^T(Z + \Delta z)x \leq F^T Zx\} \end{cases} \quad (7)$$

三、不允许卖空的考虑税收、交易费用的资产组合

在证券业中允许卖空是对(1)式中 x_i 不加限制。中国证券市场起步较晚,因而我国目前仍然不允许卖空,基金管理人在改变资产组合时,不允许卖空,即 $x_i \geq 0$ 。由此得到考虑税收的证券组合投资最优化模型为:

$$\begin{cases} \min \sigma^2 = X^T \Omega X \\ s. t. AX = B \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

得出基金管理人变动资产组合的优化模型:

$$P_1 \begin{cases} \min f(x) \\ s. t. g(x) = \underline{R} \\ x \in X, x \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

或 $P_2 \begin{cases} \max g(x) \\ s. t. f(x) = \sigma^2 \\ x \in X, x \geq 0 \end{cases} \quad (10)$

四、有交易税收、交易费用的证券组合有效边界的性质

基金管理人如何在有交易税收、费用的情况下,确定证券组合的有效边界。在原假设中,Markowitz 在方差 σ 和组合期望 \bar{R} 收益的坐标系内画出有效集。

证券组合的有效边界是由可行集上对给定的收益具有最小投资风险,或者对给定的风险具有最大收益的边界曲线确定的。因此,证券组合的有效边界可通过求解上面的两个最优化模型 P_1 和 P_2 得到。

在此考察如下模型:

$$P_3 \begin{cases} \min f(x) \\ s. t. g(x) \geq \underline{R} \\ x \in X, x \geq 0 \end{cases}$$

$$P_4 \begin{cases} \max g(x) \\ s. t. f(x) \leq \sigma^2 \\ x \in X, x \geq 0 \end{cases}$$

我们假设 $x_i, x_i \in \{x | x \in X, x \geq 0\}$ 为模型的可行解,让 x_i 在边界上摄动。在有效证券市场上,有效证券组合的风险与收益应是同步增长。对于证券组合投资管理来说,当然要求证券组合为有效, $f(x) > \sigma^2$ 时对摄动 x_i 无影响, $f(x) = \sigma^2$ 对 x_i 起约束作用,因而模型的约束起作用。于是问题 P_1 和 P_2

所确定的证券组合有效边界与问题 P_3 和 P_4 所确定的证券组合有效边界相同。因而在此定义边界:

$$e(\sigma) = \min_{\substack{g(x) \geq \underline{R} \\ x \in X, x \geq 0}} f(x); e(\underline{R}) = \max_{\substack{f(x) \leq \sigma \\ x \in X}} g(x)$$

则在平面 (σ, \underline{R}) 上,不允许卖空的证券组合的有效边界是函数 $e(\sigma)$ 和 $e(\underline{R})$ 所表示的曲线。由于问题 P_3 和 P_4 的约束条件起作用,所以 $e(\sigma)$ 和 $e(\underline{R})$ 都是增函数。

下面论证 $e(\sigma)$ 和 $e(\underline{R})$ 分别为凸函数和凹函数。

证明 1:

$$f[ax_1 + (1-a)x_2] - af(x_1) - (1-a)f(x_2) = (x_1 - x_2)^T \Omega (x_2 - x_1)$$

因为 Ω 为半正定矩阵^[2],由线性代数知识可知 $(x_1 - x_2)^T \Omega (x_2 - x_1) \leq 0$

所以

$$f[ax_1 + (1-a)x_2] - af(x_1) - (1-a)f(x_2) \leq 0 \Rightarrow f[ax_1 + (1-a)x_2] \leq af(x_1) + (1-a)f(x_2)$$

$f(x)$ 为凸函数。

同理可证: $g(x)$ 为凹函数

$$\begin{cases} \underline{R} = \bar{r}x - c | Z_{yi} - (Z + \Delta z)x | \\ \sigma^2 = x^T \Omega x \end{cases}$$

证明 2:由方程可直接看出考虑税收和交易费用后,风险方程未变,仍为凸函数 $f(x)$ 。

$$e\underline{R} = \bar{r}x - c | Z_{yi} - (Z + \Delta z)x |$$

是线性方程;显然方程为凹函数。即考虑税收和交易费用的 Markowitz 方程是向上凸的。

定理:在平面 (σ, \underline{R}) 上含有交易税收、费用的证券组合投资的有效边界是向上凸的。

本文研究了基金管理人在变动资产组合时利用建立了考虑税收、交易费用的证券组合投资模型,并证明了此证券组合的有效边界是凸的。

参考文献:

- [1] 马克威茨. 资产选择—投资有效分散化[M]. 北京:首都经济贸易大学出版社,2000.
- [2] 张京,马树才. 非负经久条件下组合证券投资的二次规划算法[J]. 预测,1998,(4):15-17.
- [3] 郭俊艳. 不允许卖空的证券组合投资风险偏好最优化模型[J]. 系统工程,1999,(9):29-31.