双头垄断不对称信息交易模型线性策略贝叶斯纳什均衡解的严格推导

蒲勇健[a,b]
(重庆大学 a. 经济与工商管理学院;b. 发展研究中心,重庆 400044)

摘要:文章给出了关于双头垄断不对称信息交易模型线性策略贝叶斯纳什均衡的严格数学证明,并分析了Gibbons在其《博弈论基础》中关于这个解的证明过程中出现的错误。

关键词:博弈论;机制设计理论;数量经济学;微观经济学;谈判理论

中图分类号:F08 **文献标志码**:A **文章编号**:1008-5831(2009)03-0023-04

一、引言

双头垄断不对称信息交易模型是博弈论中的重要模型,它在经济学中有着重要和广泛应用,譬如,可以应用于企业招聘工人的场合(如Hall与Lazear(1984))[1]。在文献中,关于这个模型的线性策略贝叶斯纳什均衡的证明却存在许多问题。譬如,在广泛流传的由MIT博弈论专家Gibbons撰写的著名博弈论教材《博弈论基础》中,有关于这个模型的线性策略贝叶斯纳什均衡推导。但是,书里的推导是不严格的,并且在推导过程中出现的某些推断事实上是缺乏根据的。鉴于该书在学术界的广泛影响,笔者认为有必要对该模型的线性策略贝叶斯纳什均衡给出有关数学上严密的推导。笔者在文章里就此进行讨论,并给出一个的数学推导过程。

双头垄断不对称信息交易模型是描述两个交易者就某件商品进行谈判报价,并且双方对该商品的价值认定都是私人信息,对方是不知道的,存在着信息的不对称。下面,我们先给出模型。

假设买方对商品的估价为v_b,卖方的估价为v_s,双方的估价都是私人信息,并且服从[0,1]区间的均匀分布。博弈规则是:卖方确定一个卖价P_s,买方同时给出一个买价P_b。当$P_b \geq P_s$,则交易达成且价格为$P=(P_b+P_s)/2$(譬如在证券交易所里的定价中);当$P_b < P_s$,则不发生交易。当交易达成时,买方的赢利为$v_b - P$,否则赢利为0;交易达成时卖方赢利为$P - v_s$,否则为0。

该博弈存在着许多贝叶斯纳什均衡。在Gibbons的《博弈论基础》中,给出了一些特例,如单一价格均衡和线性报价策略均衡。但是,Gibbons在导出线性报价策略均衡时所运用的方法是,给定一方采用线性报价策略,他简单地通过微分方法给出极大化另一方期望支付的一阶条件,从而发现这一方的最优反应策

收稿日期:2009-03-11
作者简介:蒲勇健(1961-),男,重庆人,重庆大学经济与工商管理学院教授,博士生导师,重庆大学发展研究中心副主任,可持续发展研究院副院长,主要从事微观经济学、金融学、数理经济与计量经济研究。

略是线性的。反之亦如此,这样,Gibbons 就"证明"了线性报价策略均衡的存在,并且给出了均衡解的数学表达式。然而,Gibbons 的数学推导是不严格的,因为推导最优反应策略的数学过程实际上要比 Gibbons 所进行的复杂得多。因为对于如何一方来说,在其报价的不同区间里,支付函数的数学形式是不同的,不能用对某个特定的支付函数计算其导数且令其为零的方法获得一阶条件,而在 Gibbons 那里,他所进行求导的支付函数实际上只是以分段形式表达的整体支付函数的某一段。这在数学上是不严密的。

二、模型与均衡解的严格推导

下面,我们给出完整的严格推导过程。

设贝叶斯均衡为 $\{P_b(v_b), P_s(v_s)\}$,给定 $v_b, P_b = P_b(v_b)$ 是最大化如下期望支付的解:

$$\max_{P_b} \int_{P_b \geqslant P_s(v_s)} P(v_s \mid v_b)\left[v_b - \frac{P_b + P_s(v_s)}{2}\right] \mathrm{d}v_s$$

该条件可表为

$$\max_{P_b}\left\{v_b \int_{P_b \geqslant P_s(v_s)} P(v_s \mid v_b)\,\mathrm{d}v_s - \frac{P_b \int_{P_b \geqslant P_s(v_s)} P(v_s \mid v_b)\,\mathrm{d}v_s + \int_{P_b \geqslant P_s(v_s)} P(v_s \mid v_b) P_s(v_s)\,\mathrm{d}v_s}{2}\right\}$$

$$= \max_{P_b}\left\{v_b prob(P_b \geqslant P_s(v_s)) - \frac{P_b prob(P_b \geqslant P_s(v_s)) + \frac{\int_{P_b \geqslant P_s(v_s)} P(v_s \mid v_b) P_s(v_s)\,\mathrm{d}v_s}{prob(P_b \geqslant P_s(v_s))} prob(P_b \geqslant P_s)(v_s))}{2}\right\}$$

$$= \left\{\max_{P_b}\left[v_b - \frac{P_b + E[P_s(v_s) \mid P_b \geqslant P_s(v_s)]}{2}\right] prob(P_b \geqslant P_s(v_s))\right\} \quad (1)$$

其中 $E[P_s(v_s) \mid P_b \geqslant P_s(v_s)]$ 是在卖方价格小于买方价格条件下,卖方价格的期望值。类似地,给定 $v_s, P_s = P_s(v_s)$ 是最大化如下期望支付的解:

$$\max_{P_s}\left[\frac{P_s + E[P_b(v_b) \mid P_b(v_b) \geqslant P_s]}{2} - v_s\right]$$

$$prob[P_b(v_b) \geqslant P_s] \quad (2)$$

其中 $E[P_b(v_b) \mid P_b(v_b) \geqslant P_s]$ 为在买方价格大于卖方价格 P_s 的条件下,买方价格的期望值。

该模型不仅存在贝叶斯均衡,而且均衡是十分多的,譬如,Gibbons 在其《博弈论基础》中给出了单一价格均衡。下面,我们尝试找出另外一些均衡,譬如最优策略都是线性函数的情形。之所以专门考察线性策略的情形,是因为线性策略均衡有着十分有趣的效率特征。

设卖方的战略为 $P_s(v_s) = a_s + c_s v_s$,则 P_s 服从区间 $[a_s, a_s + c_s]$ 上的均匀分布,此时当

$a_s \leqslant P_b \leqslant a_s + c_s$,

$prob[P_b \geqslant P_s(v_s)]$

$= prob(P_b \geqslant a_s + c_s v_s)$

$= prob(v_s \leqslant \frac{P_b - a_s}{c_s})$

$= \frac{P_b - a_s}{c_s}$

当 $P_b < a_s, prob(P_b \geqslant p_s(v_s)) = 0$;

当 $P_b \geqslant a_s + c_s, prob(P_b \geqslant P_s(v_s)) = 1$;

当 $P_b < a_s$ 时,$prob(P_b \geqslant P_s(v_s)) = 0$,期望支付也为 0。

令函数 $f(P_b, V_b) = \left[V_b - \frac{1}{2}\left[P_b + \frac{a_s + P_b}{2}\right]\right] \frac{P_b - a_s}{c_s}$,则 $\frac{\partial f(P_b, V_b)}{\partial P_b} = \frac{-6P_b + 3a_s + 4V_b}{4c_s}$。

令 $\frac{\partial f}{\partial P_b} = 0$,,则 $P_b = \frac{2}{3}V_b + \frac{1}{3}a_s$。

当 $P_b < \frac{2}{3}V_b + \frac{1}{3}a_s$,则 $\frac{\partial f}{\partial P_b} > 0$,$f$ 是 P_b 的严格增函数;

当 $P_b > \frac{2}{3}V_b + \frac{1}{3}a_s$,则 $\frac{\partial f}{\partial P_b} < 0$,$f$ 是 P_b 的严格减函数。

故 $f(P_b, V_b)$ 在 $\frac{2}{3}V_b + \frac{1}{3}a_s$ 处达到最大值。

(1) 若 $\frac{2}{3}V_b + \frac{1}{3}a_s \leqslant a_s$,这等价于 $V_b \leqslant a_s$。

则当 $P_b < a_s$ 时,$prob[P_b \geqslant P_s(v_s)] = 0$,期望支付也为 0。

当 $P_b > a_s + c_s$ 时,期望赢利为

$V_b - \frac{1}{2}[P_b + a_s + c_s/2]$

它是 P_b 的减函数,在 $P_b = a_s + c_s$ 处为 $V_b - a_s - 3c_s/4$。

当 $a_s \leqslant P_b \leqslant a_s + c_s$ 时,期望支付 $= f(P_b, V_b)$。

在 $P_b = a_s$ 处,$f = \left[V_b - \frac{1}{2}\left[a_s + \frac{a_s + a_s}{2}\right]\right] \times 0 = 0$;

在 $P_b \geqslant a_s + c$ 处,较大的一个支付为

$V_b - a_s - 3c_s/4 \leqslant -3c_s/4 < 0$(设 $c > 0$)

故所有 $P \in [0, a_s]$ 都是最优报价,期望支付为 0,故最优报价可取 $P_b = (2V_b + a_s)/3$。

(2) 若 $a_s \leqslant (2V_b + a_s)/3 \leqslant a_s + c_s$,等价于 $a_s \leqslant V_b \leqslant a_s + 3c_s/2$。

此时 f 在 $(2V_b + a_s)/3$ 处达到最大值 $\frac{(V_b - a_s)^2}{3c_s} \geqslant 0$,而当 $P_b > a_s + c_s$ 在 P_b 趋于 $a_s + c_s$ 时的期望支付为 $V_b - a_s - 3c_s/4$。

因为有 $(V_b - a_s)^2/3c_s \geqslant V_b - a_s - 3c_s/4$,

这是由于上式等价于 $(V_b - a_s)^2 - 3c_s(V_b - a_s) +$

$ac_s^2/4 \geqslant 0$　或$[(V_b - a_s) - 3c_s/2]^2 \geqslant 0$，

这是显然成立的。

故最优报价为：

$P_b = (2V_b + a_s)/3$

(3) 若$(2V_b + a_s)/3 > a_s + c_s \Leftrightarrow V_b > a_s + 3c_s/2$

这时若$P_b > a_s + c_s$，则P_s趋于$a_s + c_s$时，期望支付为：

$V_b - a_s - 3c_s/4$

而当$P_b = a_s + c_s$时，期望支付为：

$$f(P_b, V_b) = \left[V_b - \frac{1}{2}\left[a_s + c_s + \frac{a_s + a_s + c_s}{2}\right]\right] \cdot 1$$

$$= V_b - \frac{1}{2}\frac{4a_s + 3c_s}{2}$$

$$= V_b - (4a_s + 3c_s)/4$$

$$= V_b - a_s - 3c_s/4 > 3c_s/4 > 0$$

故此时最优报价为$P_b = a_s + c_s$。

于是在给定$P_s(V_s) = a_s + c_s V_s$下，买方的类型依存战略为：

$$P_b(V_b) = \begin{cases} (2V_b + a_s)/3 & 0 \leqslant V_b < a_s + 3c_s/2 < 1 \\ a_s + c_s & 1 \geqslant V_b \geqslant a_s + 3c_s/2 \end{cases}$$

为了获得线性解，我们假设$a_s + 3c_s/2 \geqslant 1$，可以验证，我们在后面获得的均衡解的确满足该假设。则：

$$P_b(V_b) = (2V_b + a_s)/3 \tag{3}$$

以下再看给定买方的上述策略，卖方的最优策略是什么。

给定V_s，$P_s = P_s(V_s)$是最大化如下期望支付的解：

$$\max_{P_s}\left[\frac{P_s + E[P_b(V_b) \mid P_b(V_b) \geqslant P_s]}{2} - v_s\right] Prob[P_b(V_b) \geqslant P_s]$$

因为$P_b(V_b)$是$[a_s/3, (a_s+2)/3]$上的均匀分布，当$P_s < a_s/3$时，$Pro[P_b(V_b) \geqslant P_s] = 1$

$$E[P_b(V_b) \mid P_b(V_b) \geqslant P_b] = \frac{1}{2}[a_3/3 + (a_s+2)/3]$$

$$= (a_s + 1)/3$$

期望支付为$\left[\frac{P_s + (a_s+1)/3}{2} - V_s\right] \cdot 1 = \frac{P_s + (a_s+1)/3}{2} - V_s$。

它是P_s的增函数，在$P_s = a_s/3$，期望支付的极限为$a_s/3 + 1/6 - V_s$，当$P_s > (a_s+2)/3$时，$Pro[P_b(V_b) \geqslant P_s] = 0$，期望支付为零。当$a_s/3 \leqslant P_s \leqslant (a_s+2)/3$时，

$$Pro[P_b(V_b) \geqslant P_s] = \frac{(a_s+2)/3 - P_s}{2/3},$$

$$E[P_b(V_b) \mid P_b(V_b) \geqslant P_s] = \frac{P_s + (a_s+2)/3}{2}$$

期望支付为$\left[\dfrac{P_s + \dfrac{P_s + (a_s+2)/3}{2}}{2} - V_s\right]$

$$\frac{(a_s+2)/3 - P_s}{2/3}$$

$$= \frac{[3P_s + (a_s+2)/3 - 4V_s]}{8/3}[(a_s+2)/3 - P_s]$$

$$= \frac{[3P_s + (a_s+2)/3 - 4V_s]}{8}(a_s + 2 - 3P_s)$$

$$= g(P_s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P_s} = \frac{3(a_s + 2 - 3P_s)}{8} + \frac{[3P_s + (a_s+2) - 4V_s]}{8}(-3)$$

$$= 2a_s + 4 + 12V_s - 18P_s$$

令$\frac{\partial g}{\partial P_s} = 0$，得$P_s = \frac{2 + a_s + 6V_s}{9} = \frac{2 + a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s$

当$P_s < \frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s$，　$\frac{\partial g}{\partial P_s} > 0$

当$P_s > \frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s$，　$\frac{\partial g}{\partial P_s} < 0$

故$g(P_s)$在$\frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s$处达到最大值。

为了获得线性的P_s，我们先假设

$$\frac{1}{3}a_s \leqslant \frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s \leqslant \frac{1}{3}a_s + 2/3$$

且$g\left(\frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s\right) \geqslant 0$，$g\left(\frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s\right) \geqslant \frac{1}{3}a_s + \frac{1}{6} - V_s$。

这就要求$3V_s - 2 \leqslant a_s \leqslant 1 + 3V_s$。

可证明后两式一定成立。

因$g\left(\frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s\right) \geqslant \frac{\left(\frac{2}{3}a_s + 4/3 - 2V_s\right)^2}{2}$，

故$g\left(\frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s\right) \geqslant 0$自然成立。

往证$\frac{\left(\frac{2}{3}a_s + 4/3 - 2V_s\right)^2}{8} \geqslant \frac{1}{3}a_s + \frac{1}{6} - V_s$，

即$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a_s - V_s + 2/3\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{3}a_s - V_s\right) + \frac{1}{6}$

$$\left(\frac{1}{3}a_s - V_s\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}a_s - V_s\right) + \frac{4}{9} \geqslant 2\left(\frac{1}{3}a_s - V_s\right) + \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}a_s - V_s\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a_s - V_s\right) + \frac{1}{9} \geqslant 0$$

即$\left(\frac{1}{3}a_s - V_s - \frac{1}{3}\right)^2 \geqslant 0$

自然成立。

故令$P_s = (2 + a_s)/9 + 2V_s/3$即可。

此时有$P_b = (a_s + 2V_b)/3$

$$P_s = (2 + a_s)/9 + 2V_s/3 \tag{4}$$

我们再来看$3V_s - 2 \leqslant a_s \leqslant 1 + 3V_s$不成立的情形，后面将发现，我们将获得$a_s$满足$a_s < 1$，所以只需要讨论$3V_s - 2 > a_s$的情形，此时$\frac{2+a_s}{9} + \frac{2}{3}V_s > \frac{1}{3}a_s + 2/3$。

当$P_s \in [a_s/3, (a_s+2)/3]$，期望支付$g(P_s) = \frac{(3P_s + (a_s+2)/3 - 4V_s)}{8}(a_s + 2 - 3P_s) \leqslant 0$

此时$a_s/3 + 1/6 - V_s < 0$，所以，当$P_s < a_s/3$，期望支付为负；

当$P_s > (a_s+2)/3$时，$Pro[P_b(V_b) \geqslant P_s] = 0$，期望支付为零。

因此,此时仍然可以令 $P_s = (2 + a_s)/9 + 2V_s/3$,期望支付为零。

这样,任何情况下总是有 $P_b = (a_s + 2V_b)/3$,$P_s = (2 + a_s)/9 + 2V_s/3$。前提条件是假设 $a + 3c_s/2 \geqslant 1$。下面我们计算出 a_s、c_s,将证明该条件成立。

对比策略的假定形式和导出形式,有 $a_s = (2 + a_s)/9$

$c_s = 2/3$

$a_b = a_s/3$

$c_b = 2/3$

解得:$a_s = 1/4$,$a_b = 1/12$,$c_b = 2/3$,$c_s = 2/3$ (5)

显然 $a_s = 1/4$ 和 $c_s = 2/3$

满足前面的约束条件。

故线性均衡为:

$$P_b(v_b) = 2v_b/3 + 1/12$$
$$P_s(v_s) = 2v_s/3 + 1/4 \tag{6}$$

这个博弈的规则要求当且仅当 $P_b > P_s$ 才达成交易。

三、总结性评论

在 Gibbons 的《博弈论基础》中,作者只是简单地通过对函数 $f(P_b,V_b) = \left[V_b - \frac{1}{2}\left[P_b + \frac{a_s + p_b}{2}\right]\right]\frac{P_b - a_s}{c_s}$ 和 $g(P_s) = \frac{(3P_s + (a_s + 2)/(3 - 4V_s)}{8}(a_s + 2 - 3P_s)$ 求导并令其为零来获得一阶条件。从发现一阶条件都是线性的,他忽略了支付函数在价格不同取值范围里具有不同数学表达形式,而 $f(P_b,V_b)$ 和 $g(P_s)$ 只是支付函数在价格于特殊情况下的数学表达这一事实,在数学证明上是不严格的。同时,Gibbons 在其《博弈论基础》中,正是由于这种疏忽,导致他在数学推导中得出这样的结论,即给定一方的策略是线性策略,另外一方的最优反应也一定是最优策略。在笔者的证明中发现,这样的结论是得不到的。给定卖方的策略是线性的,我们还需要假设有 $a_s + 3c_s/2 \geqslant 1$,买方的最优反应才会是线性的。尽管我们导出来的均衡解的确满足这个假设,但是,我们获得的解本来就是在这个假定下导出来的,满足这个前提条件是理所当然的。在逻辑上不排除这个条件不成立的情况下也有解的结果,但是如果是这样,解就是非线性的了,而 Gibbons 的结论就是不成立的了。这给进一步的研究留下了开放的空间。

参考文献:

[1]罗伯特·吉本斯. 博弈论基础[M]. 高峰,译. 北京:中国社会科学出版社,1999.

[2]HALL R, LAZEAR E. The Excess Sensitivity of Layoffs and Quits to Demand[J]. Journal of Labor Economics, 1984 (2):233 -257.

A Rigorous Prove on the Existation of Liner Strategy Beyesian Nash Equilibrium of Unsymmetrical Bilateral Monopoly Transaction Model

PU Yong-jian[a,b]

(*a. College of Economics and Business Administration; b. Center of Development Research, Chongqing University, Chongqing 400044, China*)

Abstract: We have presentd a rigorous prove on the existation of liner strategy beyesian Nash equilibrium of unsymmetrical bilateral monopoly transaction model in this paper.

Key words: game theory; theory of mechanism design; mathematic economics; microeconomics; bargaining theory

(责任编辑 傅旭东)