

CDO 定价影响要素的 蒙特卡洛模拟研究

刘平

(四川银监局,四川成都 610042)

摘要:CDO 是目前国内外非常关注的也是定价很复杂的一类信用衍生产品,其定价的关键就是违约概率和违约相关性的估计。文章在 Merton 扩展模型的基础上,采用蒙特卡洛方法,并结合 copula 函数来生成具有相关性的违约时间分布,然后计算出各个违约时点,进而求出标的资产组合的违约损失。在此基础上分别计算收益面和损失面的期望值,最终对各种要素对 CDO 定价的影响进行分析与比较。

关键词:债务抵押债券;蒙特卡洛模拟;Merton 扩展模型;copula 函数

中图分类号:F830.91 **文献标志码:**A **文章编号:**1008-5831(2014)03-0055-06

债务抵押债券(CDO)的定价中主要包括回复率、相关系数、违约强度以及不同 copula 联结函数等 4 种要素,不同要素对 CDO 定价的影响不同。虽然 2007 年美国金融危机后,由于 CDO 定价过于复杂受到业界和研究者的普遍批评,但近年来中国 CDO 产品发展迅猛,继国开行、建设银行之后,上海浦东发展银行、工商银行、兴业银行、民生银行以及招商银行都陆续发行了各自的 CDO 产品。因此如何开发适合国内市场的 CDO 产品,研究各种要素对 CDO 定价的影响就具有紧迫性和重要的现实意义。

一、文献综述

CDO 定价方法主要有结构模型和约化模型。结构模型主要有 BET 模型、copula 模型和因子 copula 模型。由于本文采用 copula 模型,因此本文着重对这个模型进行梳理和综述。

国外研究方面, Li^[1] 利用市场中 CDS 的已知价格来模拟违约时点,用 Gaussian copula 建立多元联合损失分布。Li 模型的主要贡献在于用 Gaussian copula 将过去某一时期内违约事件、相关性等离散变量的估算,扩展到具有连续时间的相关性违约时点的度量。Frey 等^[2] 进一步改进了 Li 的模型,提出了 student-t copula。这个模型是 Gaussian copula 的极值形式,能更好地解释金融变量的肥尾特征。Schonbucher 等^[3] 将违约相关性纳入违约强度模型中,发展出一套最一般化的 copula 函数分析及一致性的个别违约强度动态模式。Rogge^[4] 延续了 Schonbucher 等的研究,发现 Clayton copula 相较于市场上常使用的 Gaussian copula 或 student-t copula,可产生较为真实的信用价差变化过程。然而,这一模型的最大缺点是模拟过程复杂,不易执行。Burtschell^[5] 等对不同的 copula 函数在 CDO 定价中的应用作了总结性的比较分析,表明 Student-t 和 Clayton copula 比 Gaussian copula 能更好地拟合市场数据,但 Marshall-Olkin copula 能进一步提升模型的准确性。Totouom^[6-7] 将动态相关 copula 模型运用到 CDO 定价中,提出了动态 copula 模型。

国内研究方面,朱世武^[8] 讨论了如何利用 copula 函数来进行资产组合的违约相关性度量,并进一步探讨了信用衍生品的定价以及资产组合的信用风险管理问题,但其研究对象只针对 2 种资产的简单组合,对于 copula 函数及其参数的选择也不够深入。冯谦等^[9] 等使用非参数方法从市场数据中推导出一个合理的 copula 函数,然后提出利用蒙特卡洛计算 CDO 分券合理价差的方法,但没有具体的实证分析。袁子甲等^[10]

在因素模型中引入 NIG 分布,对正态因素模型进行了 3 种不同形式的推广应用,并用数值模拟对模型进行了分析,但其模型推广和数值模拟均可进一步深入讨论分析。穆放等^[11]以 KMV 模型和 copula 函数分别对债务人的违约概率和违约相关性进行估计,并计算在不同样本和回收率下各投资层次的风险溢价,利用国内市场公开信息,对债务抵押债券定价进行了实证研究,但该模型对样本选择有很高的依赖性。陈田等^[12]对 CDO 定价模型进行了综述,并按照各种定价方法对国内外研究做了很详细的综述。尹占华等^[13]在测算 CDO 损失分布的二项式扩展技术的基础上,提出用蒙特卡洛方法对建设银行 120 笔贷款模拟了损失分布并计算了 VaR。杨瑞成等^[14]讨论了基于混合分布单因子模型的 CDO 定价问题,假设资产价值的市场共同因子和异质因子均服从标准高斯和 NIG 的混合分布,且相关系数为随机相关系数,通过半解析法给出了 CDO 分券层的公允价格公式。

综合国内研究,在 CDO 定价中已经取得了一定的成绩。本文在前人的基础上有两点创新:一是详细模拟了计算违约时间点的过程;二是对各种要素对 CDO 定价的影响进行了详细的模拟。

二、研究方法

第一步,根据选定的 copula 函数产生 n 个服从均匀分布的随机变量 U 。

第二步,模拟违约时间点:(1)计算违约强度 λ ; (2)违约时间点。

在不同 copula 函数产生出随机变量 U_i 的基础上,由 $\tau_i = -\ln U_i / \lambda_i$ 求得违约时间点 τ_i 。

第三步,计算 CDO 相应的收益面和损失面以及各个层级的溢价。

假设在存续时间会支付 w 次, $B(0, t_i)$ 表示的是折现因子, T 表示从现在开始合约到期的时间, τ_i 表示违约时间点。CDO 分券的上边界为 D , 下边界为 A , EL 表示投资者可能支付的违约损失的期望值。 $I(\tau_i < t)$ 是一个示性函数,当损失在分券范围内则为 1, 如果超出分券区间,则为 0。 S 就是本文所求的 CDO 的溢价。CDO 的定价要求合约一开始是公平的,因此 CDO 的收益面和损失面相等,整个交易不存在套利机会。由上面的分析可以看出,CDO 各个分券的溢价 S 为:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n B(t_{i-1}, t_i) [EL_{[A,D]}(t_i) - EL_{[A,D]}(t_{i-1})] I(\tau_i \leq T)}{E[\sum_{i=1}^n wB(0, t_i) [D - A] I_{|L(t) \in [0,A]}] + \sum_{i=1}^n wB(0, t_i) [D - L(t)] I_{|L(t) \in [A,D]}}$$

三、实证研究

(一) 样本选取和描述性统计

国家开发银行 2005、2006、2007 年开发的 3 期债务抵押债券,都集中在电力、热力、有色金属及运输行业,并以电力行业为主,债务人所在的地区非常分散。本文选取了凯迪电力、鲁阳股份、天富热电、粤水电和云南铜业进入基础组合,涉及电力行业、热力业、建材行业和有色金属行业,其中以电力行业为主。5 家公司地域跨度也比较广,地区分散度相对较好。以 2007 年 1 月 1 日至 2009 年 12 月 31 日的日收益率为研究对象,计算公式为 $R_t = 100 * \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ 。数据来源于 <http://cn.finance.yahoo.com/glbmarkets>。采用 matlab 7.1 软件进行数据分析,对一个 3 年期 5 个层级的 CDO 组合进行模拟,假设无风险收益率为 2.25%。

(二) 计算各 copula 函数的相关系数

这里主要选取了正态 copula 函数、t copula 函数以及 Clayton copula 函数作为代表来刻画资产之间的相关性(表 1 - 表 3)。

表 1 正态 copula 函数的 Kendall tau

	凯迪电力	鲁阳股份	天富热电	粤水电	云南铜业
凯迪电力	1.000 0	0.306 4	0.322 9	0.415 5	0.359 5
鲁阳股份		1.000 0	0.284 1	0.360 4	0.312 6
天富热电			1.000 0	0.374 4	0.288 3
粤水电				1.000 0	0.372 5
云南铜业					1.000 0

表2 t copula 函数的 Kendall tau

	凯迪电力	鲁阳股份	天富热电	粤水电	云南铜业
凯迪电力	1.000 0	0.334 6	0.353 5	0.449 3	0.380 8
鲁阳股份		1.000 0	0.307 9	0.387 2	0.327 7
天富热电			1.000 0	0.397 2	0.313 4
粤水电				1.000 0	0.394 1
云南铜业					1.000 0

表3 Clayton copula 函数的 Kendall tau

	凯迪电力	鲁阳股份	天富热电	粤水电	云南铜业
凯迪电力	1.000 0	0.293 6	0.328 4	0.406 8	0.361 8
鲁阳股份		1.000 0	0.276 9	0.319 8	0.280 2
天富热电			1.000 0	0.362 7	0.306 2
粤水电				1.000 0	0.356 0
云南铜业					1.000 0

横向比较可以看出 t copula 函数计算出的相关系数比正态 copula 函数要大,而 Clayton copula 函数计算的相关系数比正态 copula 函数总体上要小一些。然后对协方差矩阵 Σ 进行 Cholesky 分解,根据选定的 copula 函数产生 n 个服从均匀分布的随机变量 U_i 。

(三) 计算违约率和违约强度

按照 Merton 模型,通过已知的股东权益值 V_E 和前面计算出的股价日波动率,推算出一年的 $\sigma_E =$ 股价日波动率 $\times \sqrt{T}$,就可以推算出 V_A 和 σ_A ,各公司的总资产和波动率如表 4 所示。

表4 各公司的总资产和波动率

	凯迪电力	鲁阳股份	天富热电	粤水电	云南铜业
公司总资产 V_A	9.950 3e+005	6.331 2e+005	1.452 4e+006	5.639 5e+005	5.619 1e+006
总资产波动率 σ_A	0.316 1	0.608 3	0.609 2	0.266 9	0.506 4

由于 Merton 模型有个前提是违约只在到期日 T 才发生,而这明显不符合现实。只要资产总值 V 小于债务总值 F ,就应该宣布违约。根据 Merton 扩展模型推导首次离开时间的参数、违约率和违约强度。

$$P(\text{公司在 } T \text{ 点以前违约概率}) = N\left(\frac{m - \theta T}{\sqrt{T}}\right) + e^{2\theta m} N\left(\frac{m + \theta T}{\sqrt{T}}\right), \theta = \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}, m = \frac{\log(F/V_0)}{\sigma}$$

表5 各公司的违约率和违约强度

	凯迪电力	鲁阳股份	天富热电	粤水电	云南铜业
m	-1.663 6	-4.726 6	-1.903 0	-2.345 5	-1.879 7
θ	-0.086 8	-0.267 1	-0.267 7	-0.049 1	-0.208 8
违约率	0.386 9	0.020 6	0.426 4	0.196 7	0.396 8
违约强度 λ	0.163 08	0.006 94	0.185 27	0.073 01	0.168 50

注:违约强度 λ 为常数。

(四) 各要素对 CDO 定价的影响

1. 回复率(R)对 CDO 定价的影响

假设在正态 copula 函数下,违约强度 λ 取 5 个资产中最小的那个, $\lambda = 0.006 94$,相关系数都为 0.3,只改变回复率,看对 CDO 定价会有什么影响,模拟结果见表 6、表 7。

表6 R为0.2时各公司的预期损失和溢价

分层(%)	预期损失(%)	标准差(%)	CDO 溢价(%)
0~3	8.940 0	4.279 8	323.824 0
3~15	8.630 0	16.670 2	297.865 5
15~22	2.352 9	4.146 6	76.054 8
22~30	1.290 0	4.513 7	46.580 0
30~100	0.114 0	5.705 3	3.608 9

表7 R为0.6时各公司的预期损失和溢价

分层(%)	预期损失(%)	标准差(%)	CDO 溢价(%)
0~3	8.710 0	4.232 9	303.623 6
3~15	4.178 3	8.821 0	159.413 4
15~22	0.308 6	1.450 3	10.841 2
22~30	0.057 5	0.767 8	2.971 2
30~100	5.714 3e-004	0.141 4	0.019 0

从不同回复率的比较可以看出,回复率越大,CDO 溢价越小。这很好理解,因为贷款回收得越好,投资人的损失越小,价格自然也就越低。

2. 相关系数对 CDO 定价影响

假设在正态 copula 函数下,违约强度 λ 取 5 个资产中最小的那个, $\lambda = 0.006 94$,回复率都为 0.4,只改变相关系数,看对 CDO 定价会有什么影响,模拟结果见表 8、表 9。

表8 相关系数为0.1各公司的预期损失和溢价

分层(%)	预期损失(%)	标准差(%)	CDO 溢价(%)
0~3	9.830 0	4.465 8	341.704 7
3~15	7.665 0	13.847 2	264.838 0
15~22	0.570 0	2.634 9	25.555 1
22~30	0.177 5	0.972 1	6.043 9
30~100	0.006 9	0.848 2	0.114 0

表9 相关系数为0.5各公司的预期损失和溢价

分层(%)	预期损失(%)	标准差(%)	CDO 溢价(%)
0~3	7.860 0	4.036 7	275.087 4
3~15	6.262 5	13.134 6	223.215 9
15~22	1.860 0	4.728 8	70.809 1
22~30	0.867 5	3.135 2	32.862 6
30~100	0.081 4	4.648 5	3.006 8

从上表比较可以看出,相关系数越大,股权类分层(假设为 0%~3%)越小,而最优先类分层(30%~100%)越大。这是因为相关系数增加,CDO 资产组合的联合分布会呈现出比较明显的肥尾状,CDO 的极端损失风险会增加;相反,相关系数减少,CDO 资产组合的联合损失分布的尾部风险缩小,从而使 CDO 的极端损失风险减少。所以说,优先类分券的价格和标的资产的违约相关性成正比,相关性越高,其需支付的保险费越高。根据市场上的 CDO 价格,推导出各分券隐含的违约相关性发现,中间类分券的相关性往往低于权益类及优先类分券,同时优先类分券的相关性又高于权益类分券。

3. 违约强度对 CDO 定价影响

假设在正态 copula 函数下,回复率都为 0.4,相关系数不变都为 0.3,只改变违约强度,看 λ 对 CDO 定价会有什么影响,模拟结果见表 10、表 11。

表10 λ 为0.00694时各公司的预期损失和溢价

分层(%)	预期损失(%)	标准差(%)	CDO 溢价(%)
0~3	8.760 0	4.240 7	306.110 2
3~15	7.112 5	13.640 6	246.803 7
15~22	1.270 0	3.919 2	41.537 3
22~30	0.342 5	1.597 3	13.663 8
30~100	0.017 1	1.696 0	1.240 6

表 11 λ 为 0.185 27 时各公司的预期损失和溢价

分层 (%)	预期损失 (%)	标准差 (%)	CDO 溢价 (%)
0 ~ 3	84.040 0	5.493 5	7.805 8e + 003
3 ~ 15	79.165 0	21.053 7	6.242 3e + 003
15 ~ 22	62.390 0	16.954 2	3.457 1e + 003
22 ~ 30	45.340 0	18.153 9	1.984 1e + 003
30 ~ 100	7.929 4	44.532 5	280.262 0

从表中比较可以看出,违约强度越大,违约可能性越大,所以 CDO 价格越高。

4. 不同 copula 函数对 CDO 定价的影响

假设违约强度 λ 取 5 个资产中最小的那个, $\lambda = 0.006 94$, 回复率都为 0.4, 看不同 copula 函数对 CDO 定价会有什么影响, 模拟结果见表 12、表 13、表 14。

表 12 正态 copula 函数各公司的预期损失和溢价

分层 (%)	预期损失 (%)	标准差 (%)	CDO 溢价 (%)
0 ~ 3	8.760 0	4.240 7	306.110 2
3 ~ 15	7.112 5	13.640 6	246.803 7
15 ~ 22	1.270 0	3.919 2	41.537 3
22 ~ 30	0.342 5	1.597 3	13.663 8
30 ~ 100	0.017 1	1.696 0	1.240 6

表 13 t copula 函数各公司的预期损失和溢价

分层 (%)	预期损失 (%)	标准差 (%)	CDO 溢价 (%)
0 ~ 3	8.390 0	4.158 6	283.596 6
3 ~ 15	6.610 0	13.360 0	226.365 0
15 ~ 22	1.630 0	4.431 9	60.549 0
22 ~ 30	0.767 5	2.894 1	24.046 2
30 ~ 100	0.053 1	3.519 3	1.800 4

表 14 Clayton copula 函数各公司的预期损失和溢价

分层 (%)	预期损失 (%)	标准差 (%)	CDO 溢价 (%)
0 ~ 3	9.300 0	4.356 5	347.534 1
3 ~ 15	7.435 0	13.653 1	263.411 4
15 ~ 22	0.640 0	2.791 0	18.908 1
22 ~ 30	0.097 5	0.623 3	4.068 3
30 ~ 100	8.571 4e - 004	0.300 0	0.056 3

从上表比较可以看出, Clayton copula 函数下股权类分层(假设为 0% ~ 3%)价格最大;而最优先类分层(30% ~ 100%)最小,相对误差也较小。t copula 函数下股权类分层(假设为 0% ~ 3%)价格最小,相对误差也较小;而最优先类分层(30% ~ 100%)最大。正态 copula 函数介于两者之间。这可能跟不同 copula 函数下的相关关系有关, Clayton copula 函数下的相关系数较小,所以股权类分层(假设为 0% ~ 3%)价格最大,而最优先类分层(30% ~ 100%)最小。而 t copula 函数下相关系数较大,所以股权类分层(假设为 0% ~ 3%)价格最小,而最优先类分层(30% ~ 100%)最大。

5. 实际情况比较

国际 CDO 产品都是 5 个层级,但国内 CDO 产品分层普遍较少,于是只能选取国开行 2005 年首次发行的“开元”一期作大致比较。

表 15 CDO“开元”一期的分层和溢价

	分层(%)	CDO 溢价(%)
优先 A 档	30 ~ 100	4.4
优先 B 档	6 ~ 30	10
次级档	0 ~ 6	15.31

从模拟的结果和实际发行的产品溢价相比较,可以发现模拟的产品在优先 A 档溢价偏低,而在次级档溢价过高,因此在模拟国内 CDO 产品时,可以对优先档调低回复率、调高相关系数和违约强度、选取 t copula 函数;而对次级档调高回复率和相关系数、调低违约强度、依然选取 t copula 函数。

四、结论

本文分析了 CDO 定价的 4 种影响因素,通过实证研究发现:回复率越大,CDO 溢价越小;相关系数越大,股权类分层溢价越小,而优先类分层溢价越大;违约强度越大,CDO 溢价越大;Clayton copula 函数下股权类分层价格最大,而最优先类分层最小,t copula 函数下股权类分层价格最小,而最优先类分层最大,正态 copula 函数介于两者之间。由于本文采用的是蒙特卡罗方法来定价,所以不能产生唯一的解析解,可能得到的结果不够精确,但从多次模拟结果来看标准差不是很大,所以结果还比较满意。

参考文献:

- [1] LI D. On default correlation: A copula approach[J]. Journal of Fixed Income, 2000,9(4):43-54.
- [2] FREY R, McNEIL A. Dependent defaults in models of portfolio credit risk[J]. Journal of Risk, 2003(6):59-92.
- [3] SCHONBUCHER J, SCHUBERT D. Copula-dependent default risk in intensity models [R]. Working Paper, Department of Statistics, Bonn University, 2003.
- [4] ROGGE E, SCHONBUCHER J. Modeling dynamic portfolio credit risk[R]. Working Paper, 2003.
- [5] BURTSCHHELL X, GREGORY X J, LAURENT JP. A comparative analysis of CDO pricing models[R]. Working Paper, BNP Paribas, 2005.
- [6] TOTOUOM T D, ARMSTRONG M. Dynamic copula processes: A new way of modeling CDO tranches[R]. Working Paper, 2005.
- [7] TOTOUOM T D, ARMSTRONG M. Dynamic copula and forward starting credit derivatives[R]. Working Paper, 2007.
- [8] 朱世武. 基于 Copula 函数度量违约相关性[J]. 统计研究, 2005(4):61-64.
- [9] 冯谦, 杨朝军. 担保债权凭证定价——Copula 函数的非参数估计与应用[J]. 运筹与管理, 2006, 15(5):104-107.
- [10] 袁子甲, 李仲飞. 基于因子模型的 CDO 定价研究: 正态单因子模型的三种推广 [EB/OL]. [2011-10-20] <http://www.ccf.org.cn/cicff2007/download>, 2007.
- [11] 穆放, 宋洁, 陈治津. 债务抵押债券定价模型探讨及实施研究[J]. 经济纵横, 2007(10):10-13.
- [12] 陈田, 秦学志. 债务抵押债券(CDO)定价模型研究综述[J]. 管理学报, 2008, 7(5):616-624.
- [13] 尹占华, 徐昕, 高春梅. 基于蒙特卡洛模拟的 CDO 损失分布测算研究及实证分析[J]. 统计信息与论坛, 2008, 9(23):13-16.
- [14] 杨瑞成, 秦学志, 陈田. 基于混合分布单因子模型的 CDO 定价问题[J]. 数理统计与管理, 2009(6):1082-1090.

The Influence of Factors on CDO Pricing Based on Monte Carlo Simulation

LIU Pin

(The Banking Regulatory Bureau of Sichuan, Chengdu 610042, P. R. China)

Abstract: CDO is a kind of complex pricing credit derivatives. The key of pricing is the default probability and the default correlation. Based on Monte Carlo method, the paper uses Merton extension model and combines with Copula function to generate default time distribution. And then it calculates the underlying asset portfolios default loss. Based on the premiums and losses of asset portfolios, the paper prices the multiple levels of CDO and analyzes different influence on CDO pricing.

Key words: CDO; Monte Carlo simulation; Merton expansion model; Copula function

(责任编辑 傅旭东)