重庆大学学报(社会科学版) 2009 年第 15 卷第 3 期
JOURNAL OF CHONGQING UNIVERSITY(Social Science Edition) Vol. 15 No. 3 2009

# 基于时变波动率的期权定价模型实证研究

唐 勇,陈继祥
(上海交通大学 安泰经济与管理学院,上海 200052)

**摘要**:B－S 模型计算的理论价格与实际市场价格存在较大的差异。这个系统性的差异被称为波动率微笑。这说明波动率不是常数,而是时间的函数。学者们也根据波动率的时变特征,提出了多种修正模型。文章主要通过中国权证市场的实证结果,比较了 GARCH 期权定价模型和随机波动率模型(Heston)以及 B－S 模型的定价效果。结果表明,GARCH 期权定价模型、Heston 期权定价模型和 B－S 模型都低估了市场价格,但是 GARCH 期权定价模型定价效果最好,而 Heston 期权定价模型相对于 B－S 模型定价优势不明显。

**关键词**:随机波动率;B－S 期权定价模型;波动率微笑
**中图分类号**:F831.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1008-5831(2009)03-0034-05

## 一 引言

在任何金融市场中,衍生品的正确定价对于每一个市场参与者来说都是非常重要的。虽然 1976 年 Black & Scholes 提出的期权定价模型(以下简称 B－S 模型)被广泛应用于期权的定价,但 B－S 模型计算的理论价格与实际市场价格存在较大的差异。这个系统性的差异被文献称为波动率微笑,即指隐含波动率随期权的行权价变化的现象。这种现象显示,当行权价接近基础股票现价时,隐含波动率较小;而当行权价与基础股票现价差异较大时隐含波动率则较大。隐含波动率随期权的行权价变化曲线呈“微笑”的形态。这说明波动率不是常数,而是时间的函数。

学者们也根据波动率的时变特征,提出了多种修正模型。对于 B－S 模型中波动率为常数的修正,大致上可根据所指定的波动率函数的特点分为三类:一类是确定性波动率模型。这类模型将波动率作为标的股票价格水平的函数,如 Cox 和 Ross(1976)提出的方差弹性为常数的 CEV 模型[1],MacBeth 和 Merville 对于 CEV 模型的参数估计问题进行了研究,发现由于参数估计上的困难,CEV 模型并不能展现出其方法上的价值特点。

另一类是随机波动率模型,这类模型中的股价波动率由不同的随机过程描述,而这些随机过程与股价运动过程只是不完全地相关。这些模型中以 Hull 和 White (1987)以及 Heston (1993) 提出的随机波动模型最为有名[2-3]。Hull & White 于 1987 年共同发表了著名的 Hull & White 随机波动性模型;通过连续时间随机过程来对基础资产价格的随机波动进行描述。由于非交易波动不能任意用现存资产来复制,所以考虑市场风险会使期权定价更加复杂化。尽管市场波动风险可以通过一些假设来消除,但要求得最后的解必须使用复杂的数量方法。Hull & White 也对他们提出的模型与 B－S 模型进行了实证比较。

**收稿日期**:2009－02－20
**基金项目**:国家自然科学基金(70371043)
**作者简介**:唐勇(1976－),男,四川成都人,上海交通大学安泰管理学院博士生,主要从事金融工程研究。
**通讯作者**:陈继祥(1948－),男,浙江绍兴人,上海交通大学安泰管理学院教授,博士生导师,主要从事金融研究。Email:jxchen@sjtu.educn。

第三类是时间序列随机波动率期权定价模型。广泛使用的是广义自回归条件异方差模型(GARCH)。Duan(1995)发展出在GARCH模型之下,如何对欧式期权进行定价的理论基础[4]。GARCH模型在本质上属于离散时间模型,Kallsen & Taqqu(1998)则将Duan(1995)所发展出的GARCH期权定价推展到连续时间的观点,证明二者在期权定价上具有一致性[5]。GARCH期权定价的理论基础发展较为完备,但由于解析解未能同步发展,因而在定价过程中,必须设计适合的数值算法。虽然Heston & Nandi(2000)在特定GARCH模型设定之下,发展出欧式期权的闭合解,但也仅局限于GARCH族模型中的某一特定形式,并未能处理美式期权的定价问题[6]。

笔者主要通过对中国权证市场的实证研究,比较GARCH期权定价模型和随机波动率模型(Heston)以及B-S模型的定价效果。

## 二 基于时变波动率的期权定价模型

### (一)GARCH期权定价模型

Duan(1995)建立了GARCH期权模型。GARCH模型是离散时间模型,开始时假设$S_t$为标的资产在时点的价格,而且标的资产价格动态在$P$测度之下,服从GARCH模型:

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r_f + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\upsilon_{t+1} \tag{1}$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t \upsilon_t^2 \tag{2}$$

$$\upsilon_{t+1} \mid F_t \overset{P}{\sim} N(0,1) \tag{3}$$

在t时点,假定收益率方程中的干扰项($v_t$)服从$N(0,1)$,$h_t$为t时点资产收益率的条件方差。同时,参数满足下面的限制:$\beta_0 > 0$,$\beta_1 \geqslant 0$及$\beta_1 + \beta_2 < 1$;限制条件用以保证平稳方差的存在且为正定的充分条件。$r_f$为单期连续复利下的无风险利率。$\lambda$为单位风险溢价,这里设定为常数。$F_t$为信息集合,可视为由$\{S_0, h_0, v_t;\ T = 0,1,2,\cdots t\}$所构成的市场信息。

根据Duan(1995)由$S_t$所衍生出的有请求权的契约,可通过局部风险中立评价法(locally risk-neutralized valuation relationship, LRNVR)的转换,进而对衍生商品进行定价。

在GARCH模型下,可利用LRNVR转换成$Q$测度如下:

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r_f - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1} \tag{4}$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t(\varepsilon_t - \lambda)^2 \tag{5}$$

$$\varepsilon_{t+1} \mid F_t \overset{Q}{\sim} N(0,1) \tag{6}$$

GARCH期权定价模型的本质在于每个时间点都有标的资产本身特有的波动性,即波动性会因时而异;并不是利用GARCH模型估计出一个波动性数值,然后当做期权在整个存续期间标的资产波动性的唯一值。这显然有别于计算历史波动性或隐含波动性的方法;尤其是当金融市场受外生变量严重干扰而巨幅震荡时,更显现出GARCH期权定价模型的实用性。

GARCH期权定价模型有三大特点:一是GARCH期权定价模型是嵌入在标的资产价格中的风险溢价的函数;这与标准的无风险偏好期权定价结果不同。二是GARCH期权定价模型不是马尔可夫性质的。在期权定价文献中,经常假定标的股票价格服从一个扩散过程,这就是马尔可夫特性。三是GARCH期权定价模型可以部分解释B-S模型的系统偏差。这些偏差包括低估价外期权,低估低方差证券的期权,低估短期期权,以及对于不同行权价格的模型隐含波动率曲线。B-S模型是GARCH期权定价模型的特例。

市场上交易期权的隐含波动率对不同的到期日和行权价表现出一定的模式,呈现U型,也即波动性微笑;其中平价期权的GARCH隐含波动率小于B-S模型;价内和价外期权的隐含波动率都大于B-S模型。也即是说,GARCH期权定价模型可以部分解释B-S模型的系统偏差。

到期期限不同对隐含波动率也有影响。随着到期时间延长,微笑效应减弱。如前面介绍的,随着时间区间的延长,收益率分布趋于正态分布。与此对应的是,GARCH模型趋于B-S模型定价。

### (二)Heston期权定价模型

Heston(1993)提出了随机波动率的期权定价模型,并得到封闭解。它假设股价服从对数正态分布,且符合几何布朗运动,波动性的过程具有自动回复平均值的特性,模型设定为:

$$dS = \phi S dt + \sqrt{V} dw \tag{7}$$

$$dV = (\omega - \theta V)dt + \xi\sqrt{V} dw \tag{8}$$

其中,$S$为股价;$\phi$为股票的期望收益;$\mu$为波动的漂移参数,相当于波动的期望收益率;$\sigma$为股票收益率的波动性;$V = \sigma^2$;$\xi$为$V$的波动性;$dw = dz$为标准wiener过程;dw与$\phi$z的相关系数为ρ。尽管Heston(1993)给出了模型的封闭解,笔者依然采用蒙特卡罗模拟来获得期权的价格。

对于Heston模型,重点考察相关系数$\rho$。股价和方差为正相关的时候,定价偏差随股价的上升而下降;价外期权的定价高于B-S公式定价,而价内期权的定价则低于B-S;相交点比平价时略低。当方差与股价负相关时,相反的结论亦成立。价外期权的定价低于B-S公式定价,而价内期权的定价则高于B-S。交叉点靠近平价。当相关系数为0时,是两种效果的结合。价内和价外期权定价高于B-S,平价时与B-S相同。对于所有的$\rho$,随着S/X趋于无限

大,偏差百分比的绝对值趋近于 0。这些普遍的观察结果对所有的到期时间均成立。

上述结果的背后原因,源于 $\rho$ 对最终股价分布的影响。假设股价和方差正相关,高股价对应高波动率,随着股价上升,发生较大正向变动的概率增加,这说明非常高的股价发生概率相比较方差不变的时候要大。低股价对应低的波动率,当股价下跌时,发生大变动的可能性变小,导致最终股价很低的可能性相应增大。最终的结果是相比较于方差为常数时的对数正态分布,最后股价的分布趋于正向偏斜。当股价和方差负相关时,相反的结果成立。股价上升而方差下降,因此不太可能出现较高的股价。股价下跌而方差增大,增加了股价正向较大变动的概率,所以出现较低股价的概率下降。最终结果是,最后的股价分布比方差为常数时的对数正态分布更加尖峰。

## 三、数据和计算方法

自 2005 年 11 月 23 日第一个权证宝钢权证上市以来,截至 2008 年 12 月 11 日,计有 37 个权证上市挂牌并期满而下市。笔者选取其中 17 个权证为研究对象,其中既有认购权证,也有认沽权证。标的股票及权证价格数据,均来自 Wind 资讯系统。

其他数据的选取标准如下:(1)无风险利率:以一年期定期存款利率作为无风险利率。(2)股利:认购权证都有保护条款,当标的公司进行除权或现金增资时,行权价向下调整,股数会向下调整,但并不会影响认购权证的价格。(3)理论价格计算:B－S 模型,只需将计算的波动率代入公式即可得到理论价格。GARCH 期权定价模型和 Heston 期权定价模型,取权证发行前一年的标的股票收益率数据,估计出标的股票的 GARCH 模型和 SV 模型参数,当做权证实际存续期间的起始模型参数。根据前面的公式采用蒙特卡罗模拟来求得期权的理论价格,模拟的次数为 10 000 次。(4)衡量指标:对于权证模型价格与市场价格的误差,采取两种衡量指标:平均百分比绝对误差(ARPE);平均百分比相对误差(RPE)。

平均百分比相对误差用来衡量模型的偏差,当该指标非零时说明存在系统性偏差,该指标非常适应于判断模型定价是高估或低估。平均百分比绝对误差既衡量模型的定价偏差,又能够衡量定价效率。

## 四、实证结果分析

由于存续期往往长达一年甚至两年,取样的权证数据又多达 17 个,笔者采取的做法是计算每周三的权证理论价格,若交易市场于星期三休市,则计算星期四的理论价格;并对应记录每周三权证的市场收盘价。对每一种模型,分别计算理论价格和市场价格的平均百分比相对误差和平均百分比绝对误差,并将其结果整理于表 1 和表 2。另外根据到期时间的不同分类,也分别计算了平均百分比相对误差和平均百分比绝对误差,其结果整理于表 3。

**表 1　各模型的平均百分比相对误差(%)**

| | 侨城 HQC1 | 五粮 YGC1 | 鞍钢 JTC1 | 邯钢 JTB1 | 首创 JTB1 | 包钢 JTB1 | 雅戈 QCB1 | 万华 HXB1 | 中化 CWB1 | 国电 JTB1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B－S | 6.03 | －7.49 | －27.72 | －23.51 | －54.90 | －41.89 | －17.54 | 3.30 | －13.50 | －24.91 |
| GARCH | 8.20 | －3.99 | －25.15 | －4.90 | －51.70 | －36.16 | －5.42 | 5.00 | －11.17 | －20.90 |
| Heston | 7.68 | －5.41 | －26.84 | －24.98 | －53.57 | －40.26 | －17.41 | 4.45 | －12.89 | －23.13 |
| | 伊利 CWB1 | 长电 CWB1 | 钾肥 JTP1 | 原水 CTP1 | 沪场 JTP1 | 招行 CMP1 | 茅台 JCP1 | 深能 JTP1 | 机场 JTP1 | 平均 |
| B－S | 0.66 | －28.61 | －58.55 | －58.97 | －2.47 | －56.91 | －45.03 | －41.92 | －41.53 | －28.18 |
| GARCH | 2.16 | －19.30 | －63.38 | －62.53 | 7.11 | －59.18 | －31.61 | －47.61 | －34.28 | －23.94 |
| Heston | 2.21 | －22.49 | －64.79 | －62.72 | 40.15 | －61.90 | －67.19 | －44.65 | －35.88 | －26.82 |

表 1 显示的是理论价格和市场价格的平均百分比相对误差。从所有定价的平均数来看, B－S 模型、GARCH 模型和 Heston 模型都低估了市场价格,平均低估幅度分别为 －28.18%、－23.94% 和 －26.82%。GARCH 期权定价模型的表现好于 B－S 模型和 Heston 模型,Heston 模型表现略好于 B－S 模型,但优势不明显。

表 2 显示的是理论价格和市场价格的平均百分

**表 2　各模型的平均百分比绝对误差(%)**

| | 侨城 HQC1 | 五粮 YGC1 | 鞍钢 JTC1 | 邯钢 JTB1 | 首创 JTB1 | 包钢 JTB1 | 雅戈 QCB1 | 万华 HXB1 | 中化 CWB1 | 国电 JTB1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B－S | 8.90 | 14.51 | 28.26 | 25.49 | 54.94 | 42.63 | 18.22 | 8.62 | 17.66 | 24.91 |
| GARCH | 9.31 | 12.97 | 25.69 | 10.08 | 51.74 | 36.92 | 7.00 | 8.76 | 15.67 | 20.94 |
| Heston | 9.77 | 14.19 | 27.40 | 27.06 | 53.62 | 41.04 | 18.12 | 9.00 | 17.50 | 23.16 |
| | 伊利 CWB1 | 长电 CWB1 | 钾肥 JTP1 | 原水 CTP1 | 沪场 JTP1 | 招行 CMP1 | 茅台 JCP1 | 深能 JTP1 | 机场 JTP1 | 平均 |
| B－S | 4.14 | 29.81 | 63.31 | 58.97 | 57.41 | 70.75 | 67.15 | 41.92 | 41.53 | 35.74 |
| GARCH | 4.76 | 26.49 | 67.55 | 62.53 | 61.99 | 71.82 | 65.70 | 47.61 | 35.13 | 33.82 |
| Heston | 4.55 | 23.77 | 68.27 | 62.72 | 83.67 | 72.92 | 69.86 | 44.65 | 36.23 | 37.24 |

比绝对误差。B－S 模型、GARCH 模型和 Heston 模型的平均定价百分比绝对误差分别为 35.74%、33.82% 和 37.24%。GARCH 期权定价模型好于 B－S模型和 Heston 模型;Heston 模型表现最差。

**表 3 到期时间与模型定价关系**

| | 平均百分比相对误差(%) | | | | | | 平均百分比绝对误差(%) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 认购权证 | | | 认沽权证 | | | 认购权证 | | | 认沽权证 | | |
| 到期时间 | B－S | GARCH | Heston | B－S | GARCH | Heston | B－S | GARCH | Heston | B－S | GARCH | Heston |
| 0.8－1 | －37.3 | －27.4 | －34.3 | 4.2 | 10.9 | 1.1 | 37.5 | 34.7 | 36.9 | 30.2 | 37.3 | 40.2 |
| 0.6－0.8 | －27.8 | －20.1 | －25.9 | －9.6 | －4.0 | －9.7 | 27.8 | 26.2 | 27.8 | 35.1 | 39.5 | 51.9 |
| 0.4－0.6 | －21.6 | －16.3 | －20.7 | －43.0 | －38.6 | －35.4 | 24.5 | 24.1 | 24.8 | 56.3 | 55.1 | 69.2 |
| 0.2－0.4 | －10.6 | －8.7 | －10.0 | －73.7 | －69.7 | －64.0 | 16.5 | 16.4 | 16.7 | 75.0 | 71.8 | 70.3 |
| 0－0.2 | －0.7 | －0.5 | －0.5 | －97.2 | －95.0 | －95.0 | 7.3 | 7.4 | 7.4 | 97.2 | 95.0 | 95.0 |

表 3 根据到期时间的不同,分为认购权证和认沽权证,分别计算了平均百分比相对误差和平均百分比绝对误差。以认购权证的平均百分比相对误差来看,在不同的时间段,GARCH 期权定价模型基本优于 Heston 模型,Heston 模型优于 B－S 模型;以认购权证的平均百分比绝对误差来看,在不同的时间段,GARCH 期权定价模型略优于 Heston 模型,而 Heston 模型与 B－S 模型比较接近。

从认沽权证来看,结果则略为复杂。以认沽权证的平均百分比相对误差来看,除了 0.6－0.8 的时间段,其他时间段 Heston 模型结果均好于 GARCH 模型和 BS 模型,GARCH 模型优于 BS 模型;而从认沽权证的平均百分比绝对误差来看,结果比较复杂,没有明确的结论哪个模型的定价效果更好。另外,从结果中还可以看到,认购权证随着到期日的临近,理论模型与市场价格之间的定价差异缩小;而认沽权证则理论模型与市场价格之间的定价百分比差异则增大。这主要是因为权证存续期间,股市基本是单边的牛市,因此多数认购权证到期时处于深度价内,而认沽权证则处于深度价外;且认沽权证到最后理论模型的价格都接近于 0,而市场价格仍然较高,因此误差百分比较大。

综合以上的实证研究结果,GARCH 期权定价模型优于 B－S 模型。

## 五、结论及建议

综合以上研究,笔者得到两个主要结论:

其一,中国权证市场价格远高于理论价格。

其二,随机波动率期权定价模型中 GARCH 模型定价效果好于 Heston 模型;Heston 模型略优于 B－S 模型,且优势不明显;而 GARCH 模型用于认购权证时定价优势更为明显。这说明时变波动率期权定价模型能一定程度上改善波动率微笑的状况。

结合中国的市场实际情况分析,造成中国权证理论价格被低估的原因主要有以下两点:(1)股改权证和可分离债分离产生的权证供应量小,品种稀缺。权证的创设量也很小,远不能满足投资者的需要。中国股市除权证外,基本没有别的衍生品市场,股指的期权和期货交易均没有推出。在这种情况下,权证的推出必然受到大量的投机资金追捧。在需求远大于供给的情况下,造成目前股改权证多数被高估、隐含波幅过高的情况出现。(2)中国目前不存在卖空机制,投资者无法通过套利操作使认购权证价格回归合理价位,影响了 B－S 公式定价的合理性。B－S理论的一个市场重要假设是市场存在卖空机制。当权证价格高估,偏离价值时,市场可通过卖空行为来使得权证回归合理价值。由于海外市场有完备的卖空机制,因此 B－S 公式给出的定价具有实际的指导意义。若权证大幅度高于其理论价值,那么卖空机制将给投资者提供良好的无风险套利机会。具体的来说:若认购(沽)权证被高估,套利者通过卖空权证和买入(卖空)标的,通过动态 Delta 对冲方式获取套利收益。若认购(沽)权证被低估,套利者通过买入权证和卖空(买入)标的,通过动态对冲方式获取套利收益。大量的无风险套利交易行为必将使得权证回归其合理价值。而沪深市场由于认购权证不允许卖空,故当认购权证价格高估时,投资者无法通过套利操作使认购权证价格回归合理价位,影响到 B－S 公式定价的合理性。因此,如果市场没有建立做市商及卖空制度,那么权证价格偏离完美市场假设下的理论价值将不可避免,不过这种偏离并不意味着权证价值被真正高估或低估。

针对中国权证市场目前存在的不足,建议政府管理部门可采取如下相应的政策措施。

第一,尽早推出备兑权证和股指期货,以丰富衍生产品系列线。

第二,完善平衡供需机制,引入持续发行机制和自由发行机制。

第三,引入做市商制度,提高权证的流动性及稳

定性。

第四,实行部分抵押或动态对冲制度。在权证发行履约担保方面,逐步由 100% 全额抵押向部分抵押或允许发行商实行动态对冲过渡。

**参考文献:**

[1] COX J C, ROSS S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976(3): 145 – 166.

[2] Hull J C, White A. The pricing of options with stochastic volatility[J]. Journal of Finance, 1987,42:211 – 300.

[3] HESTON S L. A Closed – Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options[J]. The Review of Financial Studies, 1993(6): 327 – 343.

[4] DUAN J C. The GARCH Option Pricing Model[J]. Mathematical Finance, 1995(5): 13 – 32.

[5] KALLSEN J, TAQQU M. Option pricing in ARCH – type models[J]. Mathematical Finance, 1998(8):13 – 26.

[6] HESTON S L, NANDI S. A Closed – Form GARCH Option Valuation Model[J]. The Review of Financial Studies, 2000(3): 585 – 625.

[7] HULL J. Options, Futures and other Derivatives(Fourth Edition)[M]. Prentice Hall, 2000.

[8] 李玉刚,姜玉燕. 权证定价与避险策略研究[C]. 上交所课题组,2005.

[9] 唐勇,曾小龙. 证券公司资产管理业务产品开发与创新研究[J]. 证券市场导报,2004(6):43 – 47.

[10] 唐勇,陈继祥. 存在交易成本的间断性权证避险策略研究[J]. 重庆大学学报(社会科学版),2008(2):27 – 30.

[11] 马超群,陈牡妙. 标的资产服从棍合过程的期权定价模型[J]. 系统工程理论与实践,1999,19(4):41 – 46.

[12] 吴长凤. 利用回归 – GARCH 模型对中国沪深股市的分析[J]. 预测,1999(4):47 – 48.

[13] 唐勇, 陈继祥. 中国权证市场定价效率较低的原因及对策探析[J]. 价格理论与实践,2007(3):69 – 70.

# An Empirical Study on Option Pricing Model Based on Stochastic Volatility

TANG Yong, CHEN Ji-xing

(*Antai School of Economics & Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China*)

**Abstract:** The prices obtained from the standard Black – Scholes model differ significantly from observed prices. These systematic valuation errors are documented in a stylized fact, the "volatility smile" effect. These empirical biases reflect the fact that in reality volatility is not constant, but time – depending. Researchers create many models to correct the volatility smile. This paper examines the performance of two common extensions of the Black-Scholes framework, namely a GARCH and a stochastic volatility(Heston) option pricing model. The models are calibrated to Chinese option prices. When we analyze the fit to observed prices, both models underestimate the market price, and GARCH clearly dominates both Heston and the benchmark Black Scholes model.

**Key words:** stochastic volatility; Black-Scholes option pricing model; volatility smile

(责任编辑 傅旭东)