

# 地方政府与炒房者之间的微分博弈模型

## ——政府抑制炒房的动态房产税设计

张晶,陈迅,张荣

(重庆大学经济与工商管理学院,重庆 400044)

**摘要:**房产税改革的初衷是抑制炒房,而非与民争利。地方政府房产税政策是否行之有效的标准应从征税收入与居民福利两方进行面考量。抽象出两者量化水平建立政府目标函数,同时量化炒房者的囤房收益建立其目标函数,通过主从微分博弈模型分析政府的最优动态房产税政策与炒房者的最优动态囤房比例,阐述了地方政府的行动准则,并获得主要结论:(1)地方政府的动态最优房产税税率调节应尽可能做到与炒房者行动同步;(2)税率调节应遵循:间歇不宜过长、幅度不宜过大、趋势不宜改变;(3)即使囤房行为消失,普征房产税也不会被废止,而是维持一个恰好抑制囤房动机的动态临界税率为宜;(4)为了避免房产税被转嫁,房产税应以高税率开征。

**关键词:**主从微分博弈;Bang-Coast-Bang 控制;动态房产税设计;囤房比例;约束条件

**中图分类号:**F224,F293.31 **文献标志码:**A **文章编号:**1008-5831(2011)04-0047-08

2011年1月27日,上海、重庆的个人住房房产税(简称房产税)试点暂行办法出台,展示了地方政府试图通过当前的房产税改革抑制房价过快增长,并利用该税种更加合理有效地进行财富再分配的决心。对个人消费者而言,房产税终于步入普征时代。

房产税开征的主要目的有:(1)通过物业保有环节的征税,增加投机者(炒房者)的持房成本,抑制其对商品房的囤积,从而增加市场上的住房供给量,最终抑制房地产价格的过快上涨;(2)通过该税种拓宽地方财政收入的渠道,并通过为低收入家庭修建廉租房、进行转移支付等其他方式进行财富再分配;(3)向公众传递积极的信号,引导广大群众形成正确的购房观念。

房产税是许多国家地方财政收入的重要来源,而在国内,地方主体税种一直缺失的现状导致了不可持续的地方“土地财政”愈演愈烈,个人住房房产税的普征是房产税改革的大势所趋<sup>[1]</sup>。而要有效进行征税,必须了解居民住房的准确信息,尽可能做到不增加百姓负担<sup>[2]</sup>。在参考国外物业税征收经验的基础上,

收稿日期:2011-03-17

基金项目:国家自然科学基金项目“基于自抗扰控制理论的微分对策均衡解研究”(71071172);国家自然科学基金项目“不确定时域寡头竞争微分对策问题研究”(70771118);重庆大学重点基金资助(CDJSK10 02 12)

作者简介:张晶(1984-),男,重庆大学经济与工商管理学院博士研究生,主要从事微分对策、博弈论研究;陈迅(1951-),男,重庆大学经济与工商管理学院教授,博士生导师,主要从事数量经济、产业经济、区域经济研究;张荣(1969-),男,重庆大学经济与工商管理学院教授,博士生导师,主要从事微分对策、博弈论、最优控制、消费投资于经济增长研究。

“宽税基、少税种、低税率”是目前被普遍接受的征税原则<sup>[3]</sup>。个人住房房产税的开征必然打击炒房者囤积房产的积极性,但其普征性不可避免地造成居民整体福利的损失。因此,如何既增加该税种带来的税收收入又尽可能减少居民福利的损失成为地方政府极具研究价值的技术性课题。然而目前国内构建控制模型进行量化分析的工作仍然滞后于其政策方面的研究。

主从微分博弈作为对策论的工具已广泛应用于经济管理、政治军事等多个领域,它能够有效地解释局中人在“对弈”过程中的理性行为准则。政府作为理性决策的个体,一般在博弈中被视作主导方(讨论政府动态税率设计<sup>[4]</sup>和政府动态规制<sup>[5]</sup>的研究);由于政府制定的政策(房产税)具有强制执行力,炒房者只能追随政府的行为而选择自身能力范围内的对策(囤房比例)与之展开博弈,故被视作追随者。通过求解该主从微分博弈模型,三个问题得到了证明与解释:(1)为何现实中地方政府的动态税率应尽可能地时刻随炒房者囤房比例改变而变,且采取连续渐变为宜?(2)为何达到抑制囤房的目的之后,地方政府仍有必要维持一定的动态税率继续普征房产税?(3)为何初征房产税采取高税率为宜?

同时,求解过程中分析的 Bang - Coast - Bang 控制(应用于飞行器<sup>[6-7]</sup>、电路、机械设计与操作<sup>[8]</sup>)和有关奇异弧的讨论也为系统工程问题提供了理论补充:如果主从微分博弈中的两个局中人都显式地表现为 Bang - Bang 控制类型,那么追随者一般会形成 Bang - Coast - Bang 控制,且其中的 Coast - Bang 控制阶段将一直满足奇异弧条件;而主导者一般会形成 Bang - Coast - Coast 控制,其前一 Coast 控制阶段为某特殊内点解,后一 Coast 控制阶段可被理解为一个控制域时变的 Bang - Bang 控制,且两者均不满足奇异弧条件。当然,另一类情况会在结论 5 展示。而形成上述控制情况的原因是:主导者存在一个显性的协态约束和一个隐性的耦合约束。

### 一、设定模型

地方政府(G)与当地所有炒房者存在博弈关系,虽然现实中参与其中的炒房者众多,但同一地区众多炒房者之间的竞争关系并不显著,而更多地体现出他们行动准则上的一致性,故可以把当地所有炒房者视为一个囤房势力很强的局中人(I),这将有利于分析过程的简化与求证结论的明晰。设定考察期从 0 至  $T$ , 贴现率为  $r$ ,  $t$  代表时刻,  $J^G$  为地方政府目标函数,  $J^I$  为炒房者目标函数;  $x(t)$  是当地综合房价。

#### (一)综合房价

综合房价代表着当地所有房地产价格的加权平均值,它不仅反映了当前该地区的房价水平,而且当其乘以反映当地居民福利损益的系数后,该乘积可衡量当地居民福利损益的程度。 $\dot{x}(t)$  表示其  $t$  时刻变化率,同时该式也被称之为状态方程:

$$\dot{x}(t) = -K[(1 - \sigma(t))Q - D] + \rho x(t) \quad (1)$$

且初时综合房价为  $x(0) = x_0$ 。在政府土地供给量一定的情况下,式中  $-K[(1 - \sigma(t))Q - D]$  表示炒房者囤积房产行为对综合房价变化率造成的影响,  $K > 0$  为超过居民需求的住房供给量对综合房价变化率的影响系数,  $Q > 0$  为商品房总量,  $\sigma(t)$  为炒房者囤房比例(它是政府的控制变量,其理论值有界:  $0 \leq \sigma(t) \leq 1$ , 其中  $\sigma(t) = 1$  表示房产完全被囤积的极端情况,  $\sigma(t) = 0$  表示囤房完全被挤出的极端情况),  $D$  为居民实际的住房需求量。 $\rho x(t)$  表示即期房价对自身变化率的影响,  $\rho$  为自然增长系数,体现了非投机性因素与房价变化率的关系,一般认为,  $x(t)$  的自然增长是由 GDP 增长、人口数量增长、人口年龄结构变化、城市化进程的推进等宏观因素引起。

#### (二)地方政府目标

地方政府的行为应是关注自身财政收入,又兼顾居民的切身利益。故将其目标函数  $J^G$  设定为:追求当地房产税税收与居民福利之和的最大化。

$$J^G = \int_0^T [Q\sigma(t)u(t)x(t) + H(X - x(t))(1 - u(t))] e^{-rt} dt \quad (2)$$

在能够理想地对房产被囤积部分的所有者征税的前提下,式中  $Qu(t)x(t)\sigma(t)$  表示地方政府在普征房产税方面获得的税收收入,  $u(t)$  为房产税税率(它是炒房者的控制变量,其理论值有界:  $0 \leq u(t) \leq 1$ , 其中  $u(t) = 1$  表示按房价全额征税的极端情况,  $u(t) = 0$  表示不征收房产税的极端情况)。  $H(X - x(t))(1 - u(t))$  表示当地居民福利损益量,它由综合房价与房产税两部分的组成,常数  $X > 0$  为综合房价警戒线,现实中政府出于对政权稳固性和民生的考虑,会设法使综合房价尽可能不超过警戒线水平  $X$ ; 而房产税会征收于任何拥有额外空置房产的居民,其普征性会影响整体居民福利,因为囤房的投机者和拥有多套住房的非投机者无法被房产税明晰界定,线性关系  $1 - u(t)$  表示了房产税与居民福利的反向关系;  $H > 0$  为居民福利损益的系数与上述反向关系的系数之乘积。

#### (三)炒房者目标

炒房者在房地产市场的行为应是尽可能赚取更

多的利润,故将其目标  $J^1$  设定为:追求囤积房产带来的自身总利润最大化。

$$J^1 = \int_0^T \{Q\sigma(t)[x(t)(1-u(t)) - x_0]\}e^{-\rho t} dt \quad (3)$$

当商品房总量  $Q$  一定时,  $x(t)(1-u(t)) - x_0$  ①表示炒房者所囤积房产扣除税赋成本后的单位溢价。

## 二、政府与炒房者的主从微分博弈模型

### (一)微分博弈系统

由于地方政府与当地炒房者在博弈中地位并非平等,故将地方政府视作主导者(Leader),炒房者视作追随者(Follower),记地方政府动态最优房产税税率为  $u^*(t)$ ,炒房者动态最优囤房比例为  $\sigma^*(t)$ ,主从微分博弈(Stackelberg differential game)系统如下:  
( $-V_t^G[x(t),t]$  与  $-V_t^F[x(t),t]$  分别为地方政府与当地炒房者各自的 Hamilton 函数)

$$\begin{cases} -V_t^G[x(t),t] = [Q\sigma^*(t)u^*(t)x(t) + H(X-x(t))(1-u^*(t))]e^{-\rho t} + \\ \quad V_x^G(t) \{ -K[(1-\sigma^*(t))Q-D] + \rho x(t) \} \\ \quad \lambda(t)[Q\sigma^*(t)(1-u^*(t))e^{-\rho t} + \rho V_x^F(t)] \\ -V_t^F[x(t),t] = [Q\sigma^*(t)(x(t)-u^*(t)x(t)-x_0)]e^{-\rho t} + \\ \quad V_x^F(t) \{ -K[(1-\sigma^*(t))Q-D] + \rho x(t) \} \\ x(t) = -K[(1-\sigma^*(t))Q-D] + \rho x(t), x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

且满足终时条件  $V^G[x(T),T] = V^F[x(T),T] = 0$ ,其中  $\lambda(t)$  ②为拉格朗日系数<sup>[10]</sup>。

### (二)判断式 $P^u(t)$ 和 $P^\sigma(t)$

经观察以上微分对策系统(4)可以发现:两个局中人各自的目标函数均显式上满足 Bang-Bang 控制的特点。所以,在具体分析地方政府与当地炒房者在博弈中会如何理性行动之前,需要先写出各自行动策略的控制判断式。设地方政府的  $u(t)$  和当地炒房者的  $\sigma(t)$  拥有各自的判断式  $P^u(t)$  和  $P^\sigma(t)$ 。只要下述(5)式在考察期内成立③,那么地方政府与炒房者的行为就会完全按照其规则执行。

$$\begin{cases} P^u(t) = Q\sigma(t)(\lambda(t) + x(t)) - H(X-x(t)) \\ P^\sigma(t) = KV_x^F(t)e^{-\rho t} + (1-u(t))x(t) - x_0 \end{cases} \quad (5)$$

$u(t)$  和  $\sigma(t)$  均满足 Bang-Coast-Bang 控制。

当  $P^u(t) \neq 0$  时,地方政府要么采取最大税率,要么不征税;当  $P^u(t) = 0$  时,采取一般状态下的非极端税率(此时满足奇异控制<sup>[11-12]</sup>)。同样的情况将发生,  $\sigma(t)$  的情况与  $u(t)$  完全类似,当  $P^\sigma(t) \neq 0$  时,当地炒房者要么把市场上的房产全部囤积起来,要么囤房被完全挤出;当  $P^\sigma(t) = 0$  时,采取囤积市场上的一部分房产(此时也满足奇异控制)。

根据以上信息,现将考察期划分为以下三个阶段( $T_0$  将在以后的描述中给出):

第一阶段——初始时刻至  $P^\sigma(t)$  恰好到达 0 值的时刻  $T_1$  (切换点 1);

第二阶段—— $T_1$  时刻至任一局中人策略到达 0 值的时刻  $T_2$  (切换点 2);

第三阶段—— $T_2$  时刻至考察期终止时刻  $T$ 。

但要保证政府和炒房者的判断式在三个阶段内恒成立是难以实现的,因为政府房产税税率调节的连续性与同步性(与炒房者改变囤房比例的行动同步)在以上设定下无法兼顾。以下(图 1)展示了这样的情况。

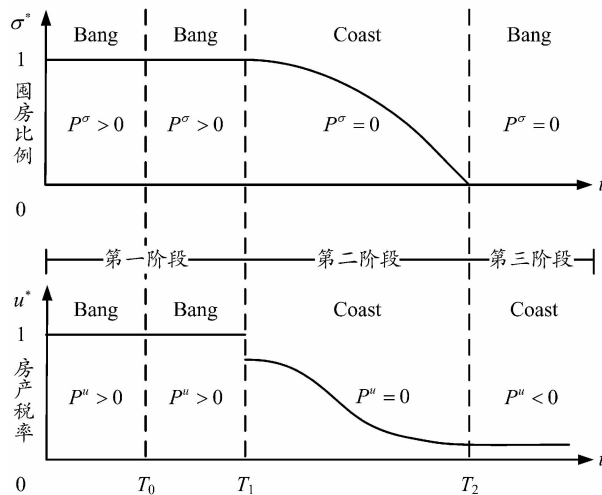


图 1 行动同步则房产税无法保持连续性

### (三)局中人的动态反馈策略

#### 1. 第二阶段控制类型的检验

从经济现象上观察:若地方政府在炒房者开始抛售手中囤积的房产时,便立即一次性较大幅度地降低房产税税率,那么随着此刻炒房者囤房成本的

①  $x_0$  代表购房单位成本,但是炒房者在考察期内的任一时刻都有购房的可能,用  $x_0$  表示并非完全准确,但在该模型中  $\sigma^*(t)$  单调不减,即囤房比例不会加大,所以此处设定是合理的。

② 从显式上看,该微分博弈系统中,追随者的 Hamilton 函数无法提供其策略的耦合约束,因此只能将追随者的协态方程作为主导者的显性约束,而隐性的耦合约束却无法在此处展现,故这里只存在唯一拉格朗日系数  $\lambda(t)$ 。它应满足初值  $\lambda(0) = 0$  的微分方程:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{dV_t^G(t)}{d\lambda(t)} = Q\{[u^*(t)x(t) - \lambda(t)(1-u^*(t))]e^{-\rho t} + KV_x^G(t)\} \frac{d\sigma^*(t)}{d\lambda(t)} - \rho\lambda(t)$$

其中仅  $\sigma^*(t)$  对  $V_x^G(t)$  的偏微分存在,其他偏微分均为 0,这就是所谓隐含的耦合约束,否则必有  $\frac{d\sigma^*(t)}{d\lambda(t)} = 0$ 。

③ 如果某时段判断式无效,那么该时段不应满足控制式的要求,而是另有控制原则。

陡降,已被挤出的房产又会再次被囤积起来。这应该是不容置疑的,其中的问题出现在了第二阶段的控制类型上,为了保证囤房被持续地挤出,第二阶段要求动态税率应该保持“连续渐变”。

通过广义勒让德-克勒布施(简称GLC)条件<sup>[13-14]</sup>检验发现:炒房者的策略在第二阶段完全满足判断式;而地方政府的策略在第二阶段应处于一种特殊的“内点解”状态,而在此阶段内的地方政府策略判断式 $P^u(t)$ 无效<sup>④</sup>。

在以上检验中还额外获得重要信息: $\sigma^*(t)$ 可由 $u^*(t)$ 、 $\dot{u}^*(t)$ 、 $\ddot{u}^*(t)$ 和 $V_x^1(t)$ 线性地表示,通过该关系还可获得(6)式,这对隐性耦合约束的使用至关重要。

$$\frac{\partial \sigma^*(t)}{\partial V_x^1(t)} = \frac{-e^n \rho^2}{Q[\rho - r + (r - \rho)u^*(t) - \dot{u}^*(t)]} \quad (6)$$

### 2. 房产税税率与囤房比例的动态反馈

地方政府的动态房产税税率与炒房者动态囤房比例在考察期内存在相互作用,而GLC条件只给出了一组不完整的相互关系,需要加入补充关系才能进行进一步求解。现仅介绍步骤结构图如图2。

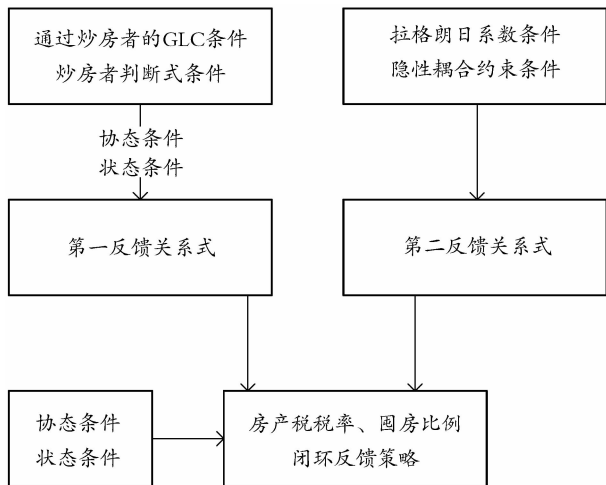


图2 房产税税率与囤房比例的动态反馈

### 三、分情况讨论

根据初始时刻的地方政府策略可将情况分作两类:a 政府初时执行最大税率;b 政府初时不采取征税。根据动态房产税是否可以在考察期内达到对囤房行为的完全抑制,又可将情况分作两类:i 能够完

全挤出囤房;ii 不能完全挤出囤房。综合以上分类信息,将分以下4类情况展开讨论(图3)。

为保证讨论的有效性,需先做以下假设:

第一,考察期是短期的,炒房者的囤房行为短期内将致使房价因房屋供需变化而引起波动,抵消了通胀,短期内通常认为综合房价水平警戒线应和平均工资挂钩,但由于平均工资涨速远落后于GDP和人口增速,平均工资水平被视为常量,因此综合房价水平警戒线也被视为常量。

第二,大众具有依赖不动产抵御货币贬值的习惯性行为,所有居民都被视为潜在的炒房者。

第三,考察期初时,炒房者已经处于极端的囤房状态,该设定保证了政府执行房产税的动机。

	a 初时征税	b 初时不征税
i 能够完全挤出囤房	①	②
ii 不能完全挤出囤房	③	④

图3 房产税征税效果分析

(一) 房产税能够完全挤出囤房

1. 政府初期即征税的闭环反馈控制

(1) 第一阶段(0 → T<sub>1</sub>)。

地方政府初时便执行最高税率直至该阶段期末,目的是持续给炒房者施加最大的压力,使得炒房者囤房的利润持续减少,直至囤房开始被挤出的那一刻为止。所以,此阶段 $u^*(t) = \sigma^*(t) = 1$ ,并且 $P^u(t) > 0, P^\sigma(t) > 0$ 。

(2) 第二阶段(T<sub>1</sub> → T<sub>2</sub>)。

该阶段初时 $P^\sigma(T_1) = 0$ ,虽然此刻 $P^u(T_1) > 0$ 仍然成立,但已成为无效的控制判断式。该阶段炒房者采取“完全囤积→部分囤积→完全抛出”的动态囤房比例,政府则采取“最高税率→一般税率→临界税率”的动态房产税税率。可解释为:迫于政府房产税政策,炒房者出于最大化自身利益的考虑,将在第二阶段开始减少囤房的比例,而且到该阶段期末,所有被囤积的房产都将被挤出,所有人都不愿意持有多余房产。反观政府,它也会在此阶段一开始便逐步降低房产税税率,但是降幅不应超过炒房者囤房比例的降幅,最终在该阶段期末达到临界税率(临界税率将在第三阶段贯穿始终,而第二阶段期末该税

④(反证法)假设在第二阶段满足 $P^u(t) = P^\sigma(t) = 0$ ,检验炒房者GLC条件: $-\frac{\partial V_\sigma^1(t)}{\partial \sigma^*(t)} = 0$ 且 $\frac{\partial V_\sigma^1(t)}{\partial \sigma^*(t)} \neq 0$ ,奇异控制最大值存在(此处讨论实际问题,必然 $\frac{\partial V_\sigma^1(t)}{\partial \sigma^*(t)} < 0$ )。检验地方政府GLC条件:要使 $-\frac{\partial V_u^1(t)}{\partial u^*(t)} = (Qe^{-nt})^2 [\lambda(t) + \lambda(t)1\sigma^*(t)] \left[ \frac{d\sigma^*(t)}{dV_x^1(t)} \right] = 0$ 在 $\frac{d\sigma^*(t)}{dV_x^1(t)} \neq 0$ 的前提下成立,要求 $\lambda(t) = 0$ ,显然不可能成立。由此可见,政府在第二阶段的策略应该是特殊“内点解”而非奇异控制,这是因为:政府的Hamilton函数拥有一个显性的协态约束和一个隐性的耦合约束。

率为  $1 - \frac{x_0}{x(T_2)}$ 。

(3) 第三阶段 ( $T_2 \rightarrow T$ )。

该阶段初时炒房者的囤房便已被完全挤出, 抑制炒房的目的达成, 而此时政府正处于临界税率, 如何兼顾居民福利与抑制囤房成为其当前课题。在该阶段, 要使炒房者不再囤积房产, 须至少使炒房者的判断式满足  $P^\sigma(t) \leq 0$ 。此时存在两种可能的情况:

a. 若  $P^\sigma(t) < 0$ , 政府只需将税率动态地维持在临界税率之上 (即  $u^*(t) > 1 - \frac{x_0}{x(t)}$ ) 便可继续加强对炒房者的威慑, 囤房行为必然不会在此阶段出现; b. 若  $P^\sigma(t) = 0$ , 此时囤房也不会出现, 因为维持该临界税率恰好对炒房者形成抑制 (控制理论上, 此时没有任何动机促使炒房者自身策略进一步改变), 而且此时的税率将低于 a 的情况 (一直处于临界状态)。可以发现, 该临界税率在保证囤房不再出现的大前提下, 将居民福利损失控制到最少。如果低于该税率, 虽然居民福利会继续增加, 但会因为炒房者的再次进入而产生适得其反的效果——政府目标函数数值不升反降<sup>⑤</sup>。政府与炒房者在该阶段的策略表示为:

$$\begin{cases} \sigma^*(t) = 0, P^\sigma(t) = 0 \\ u^*(t) = 1 - \frac{x_0}{x(t)}, P^u(t) < 0 \end{cases} \quad (7)$$

图 4 将展示这类“房产税能够完全挤出囤房且政府初期即征税”的控制情况。

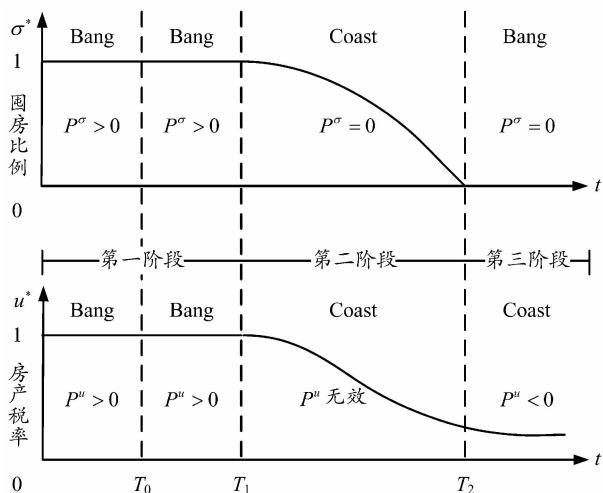


图 4 完全挤出囤房且初期征税

结论 1: 若炒房者在  $T_1$  时刻开始减少囤房比例,

那么地方政府在同一时刻降低房产税率为宜。否则, 此时多收获的房产税收入将无法弥补广大居民福利损失的扩大。可解释为: 现实中政府采取高税率, 其目的是抑制囤房行为, 而一旦囤房开始被挤出, 政府不存在仍然维持该税率的动机。以上可以为政府提供这样的参考: 地方政府在制定动态的房产税税率时须时刻关注炒房者的行为, 尽可能做到和炒房者行动同步。

而关于“同一时刻”仍需有这样的认识: 即便无“先后”之分, 但炒房者是带动政府的动因。因为判断式到达 0 值有“先后”之分, 所以存在一方主动另一方被动的情况 (与主从微分博弈中的主导者、追随者无关), 判断式在考察期内先到达 0 值的一方被视为主动方, 反之为被动方, 本模型主动方只会是炒房者。(其必须满足条件:  $T_1$  时的综合房价不超过综合房价警戒线的水平。)

结论 2: 地方政府的动态最优房产税税率应该尽可能保持连续性。可解释为: 现实中政府每一次对房产税税率进行的调节幅度不宜过大, 间歇不宜过长。房产税多次微调有一定的积极意义: 让所有参与者都形成总体趋势单向渐变的预期, 使宏观经济运行稳健, 大幅波动的情况减少。但执行起来需要对两个成本进行考虑: (1) 多次调节税率的经济成本; (2) 总体趋势须扭转时, 预期难以快速调整所造成的隐性成本。从该模型只能直观地得出: 当政府发现炒房者已经开始逐渐减小囤房比例时, 政府若非“同时”且“逐步”地进行动态房产税率的降低, 则不可维持迫使炒房者持续减持囤房的局面。

在同时改变策略的  $T_2$  时刻, 主动方控制判断式  $P^\sigma(t)$  先于被动方控制判断式  $P^u(t)$  到达 0 值, 此时主动方 (炒房者) 有“主动”改变自身策略的趋势, 而迫于主动方的改变, 被动方若在此时不选择改变自身策略, 则会出现控制上的悖论 (不满足主动方的奇异控制), 于是在恰好跨过  $T_1$  时刻的瞬间, 被动方也选择了改变自身策略, 但此时因约束的作用使得目标函数关于控制变量非线性, 存在“内点解”的情况, 此时判断式  $P^u(t)$  无效。但由于炒房者满足 GLC 条件, 那么可知: 炒房者策略连续且平滑; 虽然政府的 GLC 条件不成立, 但由炒房者 GLC 条件提供的  $\sigma^*(t)$  与  $u^*(t)$  之间的关系式隐

<sup>⑤</sup>第三阶段内, 炒房者的协态方程为  $V_x^1(t) = \frac{\partial V^1(t)}{\partial x(t)} = -\rho V_x^1(t)$ , 由于  $\sigma^*(t)$  不再作用于  $V_x^1(t)$ , 又  $V_x^1(T) = 0$ , 可知此阶段  $V_x^1(t) = 0$ 。因为  $\sigma^*(t)$  只会影响到  $V_x^1(t)$  和  $x(t)$  的第二阶段取值, 而对于第三阶段无能为力, 此时判断式  $P^\sigma(t)$  已不受制于  $\sigma^*(t) = F(t) = 0$ 。也就是说, 第三阶段开始, 政府策略的判断式重新生效, 若要满足  $P^\sigma(t \in [T_2, T]) = 0$ , 仅需该阶段  $u^*(t) = 1 - \frac{x_0}{x(t)}$ 。

含了结论:  $u^*(t)$  在  $T_1$  时刻的连续且平滑(一阶、二阶导数均存在)。

结论3: 当囤房被完全挤出后, 政府的动态最优房产税税率应该是维持在一个恰好阻止炒房再度兴起的动态临界税率。可解释为: 在现实中, 即便市场内没有一个炒房者存在, 政府已然开征的房产税仍然不能被废止, 它是震慑炒房者的有效工具。而该模型得到这样一个房产税税率: 将炒房者恰好排除在市场之外的税率, 高于它会损失居民福利, 低于它会使炒房者有机可乘, 保持适度的动态房产税税率将是抑制炒房再度兴起且控制居民福利损失的必要措施。

与其说政府策略处于 Coast 控制, 不如理解为政府策略处于一个“控制域时变的 Bang - Bang 控制”, 且该控制域由炒房者的囤房动机决定。炒房者在  $T_2$  时刻退出, 囤房被完全挤出。之后存在  $P^u(t) \leq 0$ , 它要求政府在第三阶段上采取最小的房产税税率  $\inf[u(t), 1]$ , 但此阶段的政府税率下界已不再为 0 税率。于是税率下界应该由  $P^u(t \in [T_2, T_1]) = 0$  决定, 故此阶段控制域下界即为  $\inf[u(t), 1] = 1 - \frac{x_0}{x(t)}$ , 也即抑制囤房的临界税率, 可见其本质实为一个控制域连续时变的 Bang - Bang 控制。

## 2. 政府初期不征税的闭环反馈控制

若初时政府采取不征税的策略, 那么会在时刻  $T_1$  之前存在某一时刻  $T_0$ , 此时是地方政府房产税税率的 Bang - Bang 控制切换点。也就是说, 初期房价还未高到政府试图去控制的程度, 而一旦政府觉得应该介入房价的调控并打击炒房时, 就会在该时刻直接以高房产税税率进入。

结论4: 政府初征房产税时应采取高税率。可解释为: 在现实中, 以低税率开征对抑制囤房的效果并不明显。首先, 炒房者承受的成本压力不大, 无法促使囤房被挤出; 再次, 炒房者将逐渐转嫁该税赋至购房者, 只要转嫁水平与低税率匹配, 购房者将逐渐接受因房产税导致的房价上涨, 且这类因成本转嫁而拉动的普涨趋势极难被扭转。个人住房房产税使物业保有环节的成本增加, 势必推动炒房者对其预期收益要求的增加; 另一方面, 由于房价的上涨, 还会拉动产业链中相关产业预期收益的膨胀, 因为更多的投资者将进入房地产市场, 同时也会伴随原材料价格的上涨。所以低税率开征个人住房房产税可能会助推房价在中、长期持续上涨。

应该持有这样的观点看待该结论: 高税率带来的居民福利的暂时性损失是政策调整所难以避免的成本, 任何一种政策的引入都会牺牲部分群体的利益,

但应该看到的是, 该成本比“采取效果不佳的措施且以后施以更大力度的纠正”更为节约。理想化的模型要求采取税率上限执行, 而现实中, 地方政府可按照一个容忍范围内的税率上限作为控制域上界。

与图4差别很小, 图5展示了初期政府不征税的情况。

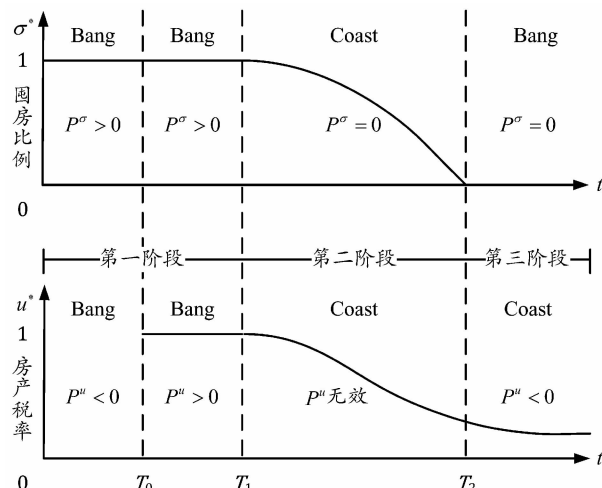


图5 完全挤出国房且初期不征税

## (二) 房产税不能够完全挤出国房

### 1. 政府初期即征税的闭环反馈控制

若  $T_2$  是政府策略  $u^*(t)$  先于  $\sigma^*(t)$  到达 0 值的时刻, 此时  $u^*(T_2) = 0$ , 但囤房仍然未被完全挤出, 炒房者囤房比例  $\sigma^*(T_2) > 0$ 。可见政府的房产税税率降低至了 0 (即废除房产税), 可囤房行为依然存在, 那么是否意味着炒房者在博弈中取胜了呢? 从数学上来看, 可以这么认为; 但从经济含义上看, 终时的房价已经跌破了初始价格, 炒房者此刻已然处于亏本状态, 这也是政府与炒房者都不希望看到的局面(图6)。

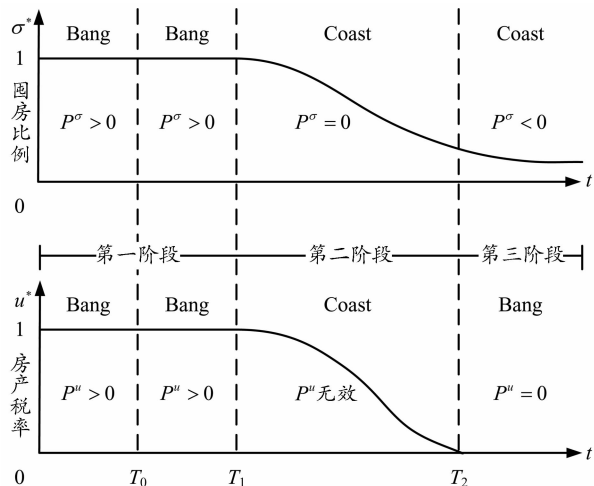


图6 不能完全挤出国房且初期征税

结论5: 现实中几乎很难见到政府取消房产税但炒房者仍然囤房的局面。可解释为: 此时房价已经

跌至初时价格  $x_0$  之下,炒房者在初时购入房产越多,到现在亏损也越多。政府此后不征税的原因是房价远远低于综合房价警戒线 ( $x(T_2) < X$ ),居民福利早已获得保证,而此时若再施加房产税,虽然会继续给炒房者施压,但也会影响到拥有多套自住房的居民,因为房产税无法区分住房的自住性与投机性。其实,这样的结果在中国经济高速发展的今天是难得一见的,房地产市场需求与供给缺口的现状很难被打破,房价如此大幅度地下跌也是政府不愿见到的。所以,以牺牲房地产市场乃至整个宏观经济良性发展的“前期高房产税 + 后期废除房产税”策略并不容易存在于现实当中。

但该结论保证了这个数学模型解的完整性,在系统工程的研究中,仍然具有其价值:主从微分博弈并不能保证在任何情况下,主导者都可达到所希望的局面。同样可以形成追随者牵制主导者的局面。

政府在  $T_2$  时刻取消了房产税,因为此后的综合房价将逐渐跌破买入价格,炒房者几乎无利润可言,但鉴于初期的囤房策略,为了避免更多损失,炒房者仍然不会完全退出。在此之后存在  $P^\sigma(t) \leq 0$ ,要求炒房者在第三阶段采取最小囤房比例  $\inf[\sigma(t)]$ ,若炒房者再次采取  $\inf[\sigma(t)] = 0$  的策略,显然将亏损更多。于是采取保证  $P^\sigma(t \in [T_2, T]) \equiv 0$  刚好成立的策略(不妨设此时  $\sigma(t) = F(t)$  可满足),于是  $\sigma^*(t) = \inf[\sigma(t)] = F(t) > 0$  可以使炒房者将损失控制到最低,这是个抑制政府征税的动态临界囤房比例,且同样是一个“控制域时变的 Bang - Bang 控制”。

## 2. 政府初期不征税的闭环反馈控制

该情况类似于②结合③的讨论,结论类似,此略。

## 四、结语

主从微分博弈用于房产税改革的讨论有着积极意义,虽然当前的数学工具无法通过符号计算获得动态房产税税率与动态囤房比例的反馈解析解,但可以在量化模型参数与恰当设定控制变量取值范围的基础上,对该模型进行数值求解,这将是后续研究工作的方向之一。结论 1 - 5 在充分解释其经济含义的同时,也为地方政府的动态最优房产税税率设计提供了理论支持。

但仍需认识到:改革房产税是房地产宏观调控的重要部分,但促进房地产业可持续健康发展是一个系统工程,不能简单地否定以往的宏观调控政策,更不能把抑制房价上涨的希望全部放在房产税上,而应统筹制定和实施相关政策措施<sup>[15]</sup>。虽然控制论

模型能够对实际经济问题进行拟合并提出操作建议,但影响房地产市场的因素是很难穷举的,所以要该理论应用于这类庞大的系统,仍有许多工作需要继续进行。

在系统工程方面,两个 Bang - Coast 控制的内容得到了颇具价值的研究:(1)两局中人同时改变策略的 Coast 控制(追随者选择奇异控制、主导者选择特殊“内点解”);(2)控制域时变的 Bang - Bang 控制和处于奇异弧上的边界控制。

## 参考文献:

- [1]傅樵. 房产税的国际经验借鉴与税基取向[J]. 改革, 2010,12(8):57-61.
- [2]刘光宇.“被娱乐化”的房产税[J]. 社会观察,2010,7(25):52-53.
- [3]田祥宇. 国外物业税的征收经验及对中国的启示[J]. 宏观经济研究,2010,11(5):77-79.
- [4]张荣,刘星. 动态最优税率设计问题:一个 Stackelberg 微分对策模型[J]. 系统工程学报,2003:18(5):410-418.
- [5]杨先菊,龚秀松,等. 基于 Stackelberg 微分博弈的销售电价规制模型及其分析[J]. 系统工程,2009,5(15):77-81.
- [6]HYUNSIK J. Sensor craft control using drone craft with Coulomb propulsion system[D]. Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005.
- [7]KEVIN M L. Optimal control of the thrusted skate[J]. Automatica, 2003,39:173-176.
- [8]AGOSTINI M J, PARKER G G, et al. Generating swing-suppressed maneuvers for crane systems with rate saturation [J]. IEEE Transactions on Control System Technology, 2003,11(4):471-481.
- [9]SETHI S P, THOMPSON G L. Optimal control theory: Applications to management science and economics (second edition) [M]. Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 2000: 17-26.
- [10]李登峰. 微分对策及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000: 226-241.
- [11]GUO X, TOMECEK P. Solving singular control from optimal switching[J]. Asia - Pacific Financial Markets, 2008, 15(1):25-45.
- [12]MAURER H. Theory and applications of Bang - Bang and singular control problems[Z]. ifip2007. agh. edu. pl
- [13]吴受章. 最优控制理论与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008: 216-225.
- [14]ROBBINS H M. A generalized Legendre - Clebsch condition

for the singular cases of optimal control[J]. IBM Journal of Research and Development, 1967, 11(4):361-372.

[15] 刘键. 改革房产税是房地产宏观调控的重要部分[J]. 中国财政, 2010, 20(34):74.

## A Differential Game between Local Government and Real Estate Speculators: Dynamic Property Tax Rate Design for Local Government

ZHANG Jing, CHEN Xun, ZHANG Rong

(College of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** Government's original intention of property tax reformation was to inhibit housing speculation, rather than seize benefit from local resident. Whether local government's property tax policy was valid depended on tax receipt and residents' welfare. By quantifying them to set local government's objective function, also quantifying the speculation revenue to set estate speculators' objective function, Stackelberg differential game model was available to analyze the government's dynamic optimal tax rate strategy, as well as speculators' dynamic optimal house hoarding ratio strategy. The government's operative norms are elaborated and several main conclusions are obtained: 1) Local government's dynamic optimal adjustment of property tax rate should be synchronized with speculators' actions as possible; 2) Rate adjustment should follow: improper too long interval, each time slight variation, consistent varying tendency; 3) Even if the house-hoarding behaviors disappear, property tax still would not be abolished. It is appropriate to maintain a dynamic critical rate for just inhibiting the motivation of house-hoarding; 4) In order to avoid property tax is transferred, high rate should be adopted at the very beginning of property tax reformation.

**Key words:** Stackelberg differential game; bang-coast-bang control; dynamic property tax adjustment design; house-hoarding ratio; constraint

(责任编辑 傅旭东)