

带有再融资摩擦的报童库存问题

吴金奇,王 勇

(重庆大学 经济与工商管理学院,重庆 400044)

摘要:通过贷款融资来解决资金不足问题是现代企业常用的方法之一,文章研究了报童在资金不足时,通过银行贷款来解决资金问题;并假定了当报童销售收入不足偿还银行本息时,付出一定的额外成本(摩擦成本)再融资来偿还银行本息,以及银行根据报童的借贷情况设定利率的反应行为;指出再融资摩擦系数越大,报童最佳订购量越少,期望利润越低,因此减少报童融资成本对增加报童订购量促进报童利润增加有重要意义。更近一步地,研究了报童、银行合作贷款的情况,指出合作贷款能使报童订购量增加,有利于社会的发展。最后通过一个数例来考察各因素对贷款融资的影响。

关键词:报童问题;再融资;摩擦成本

中图分类号:F275 **文献标志码:**A **文章编号:**1008-5831(2012)01-0059-06

一、引言

由于报童问题在经济生活中具有极为重要的应用价值以及近年来学者们的广泛研究,它已经发展为一个具有多方面扩展模型并且十分具有活力的研究课题。文[1]总结了报童问题扩展模型,并将其分为:(1)决策目标的扩展模型;(2)零售商的扩展模型;(3)市场格局的扩展模型;(4)供应商的扩展模型;(5)其他扩展模型。在各种扩展模型中,零售商的扩展模型分枝最多,大致可以分为需求信息的扩展模型、零售商不同价格策略的扩展模型、具有约束的报童问题和具有产品供应不确定性的报童问题。

具有约束的报童问题有40余年的历史,此问题一直备受学者们的关注。文[2]研究了具有库存容量约束的多产品报童问题的求解方法。文[3]研究了需求信息两种情形(区间情形与离散情形)下具有预算约束的多产品报童问题,并提出了求解算法。文[4]利用分时段和离散的需求来研究不确定性,并针对带有资金约束的多货物报童问题(Multi-product newsvendor problem, MPNP)发展了一些最小最大后悔公式。当需求概率函数是均匀分布和 generic iterative method (GIM)时,文[5]对带有资金约束的MPNP给出了精确解。文[6]证明了文[5]不可能实现的订购量(负值),并给出了如何划分开始值的区域计算并拓展了现存的方法。Abdel - Malek^[5]提出了具有预算约束多产品报童问题的精确模型、近似模型和一般迭代模型,研究了各种模型的性质及其最优解表达式或者求解算法。2005年,他们研究了具有预算约束多产品报童问题解空间的对偶,设计了求解产品最优订购量的算法^[7]。2007年,他们研究了具有预算约束的多产品报童问题的解空间,给出了将解空间划分为三个区域的阈值^[8];还使用二次

收稿日期:2011-05-11

基金项目:国家自然科学基金项目(70872123)

作者简介:吴金奇(1984-),男,河南确山人,重庆大学经济与工商管理学院博士研究生,主要从事物流管理研究;王勇(1957-),男,四川内江人,重庆大学经济与工商管理学院教授,博士研究生导师,主要从事物流与供应链管理研究。

规划来求解具有预算约束的多产品报童问题模型。文[9]用逼近方法来处理具有预算约束的多产品报童问题。文[10]研究了具有资源约束的两产品报童问题,并且两种产品可相互替代,提出了该问题的多目标规划模型。2009年,文[11]通过使用最大最小算子,对带有模糊预算及存储能力约束的模糊EOQ模型给出了改进解的程序。文[12]分别应用一般类型的、离散的和连续的需求函数于自然二项式,从而对于带有约束的MPNP发展了一种解的算法。

Maqbool Dada^[13]开创了报童预算资金不足的另一解决方法,报童通过向基金或银行等金融机构借款,来解决预算不足的问题。同时, Maqbool Dada模型还根据报童的借贷情况,给出了银行设定利率的借贷反应行为。然而 Maqbool Dada^[13]蕴含着报童只是用卖出货物所得货款来偿还银行本息,当卖出货物不足以偿还银行本息时,报童不再足额还款。这可能导致报童下次不能贷款,以及由于不完全偿还贷款带来的法律纠纷,在实践中这显然是不可取的。我们假定报童可以通过其他途径再融资来偿还

银行本息,以解决报童销售收入不足以偿还银行本息的问题;同时假定了再融资获得资金有额外的成本,我们称之为摩擦成本,用再融资的方法解决了带有资金约束的报童问题。

二、报童、银行 Stackelberg 博弈模型

我们考虑这样的带有资本约束的报童(CCNV, capital-constrained newsvendor)问题:报童在开始卖报之前购进货物,其自有资金不足以购买他想购进的货物,需要向银行贷款融资。然后卖出货物,顾客需求量以一定的概率分布函数随机出现,没有卖完的货物不能退。卖完货物后,报童将销售收入优先偿还银行贷款及利息;当销售收入超过银行贷款及利息时,超出部分即为报童的收入;当销售收入不足以偿还银行本息时,不足部分需要其他途径获得资金来偿还,通过其他途径获得资金有额外的摩擦成本,其摩擦系数为 $K(K > 0)$;报童通过其订购量的变化来最优化其利润,银行可以自由通过利率的变化来最优化其利润,报童、银行两者构成 Stackelberg 博弈模型。

表1 文中用到的数学符号

符号	含义	符号	含义	符号	含义
Q_0	经典报童问题最佳订购量	$F(\cdot)$	顾客需求量的累积概率函数	$K(K > 0)$	报童卖出货物不足偿还贷款本息再筹集资金时的摩擦系数,简称再融资摩擦系数。
Q	报童订购的货物量	$f(\cdot)$	市场需求量的概率密度函数	y	报童用于偿还贷款本息的需要卖出货物数量
c	单位货物订购价格	$\eta(\eta < cQ_0)$	报童自有资金	π_a	报童的利润函数
$p(p > c)$	单位货物卖出价格	$B = cQ - \eta$	报童融资贷款本金	π_b	银行的利润函数
D	顾客需求量	r	报童融资贷款的银行利率	π_0	报童资金充足无贷款时的利润

注:个别未列入本表的符号正文中有相关描述,这里不再重复。

(一) 报童问题的描述

为简单起见,我们假定报童未卖出货物残值为零并且货物不足的信誉成本为零。定义 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ 。经典的报童最佳订购量 Q_0 满足 $\bar{F}(Q_0) = c/p$ 。

在 Maqbool Dada^[13]的文章中,报童的优化目标函数转化为:
$$\max_{Q > \eta/c} \pi_n = -\eta - B(1+r)\bar{F}\left(\frac{B(1+r)}{p}\right) + p \int_{\frac{B(1+r)}{p}}^Q x dF(x) + pQ\bar{F}(Q) = -\eta - B(1+r)\bar{F}(y) - p \int_0^y x dF(x) + p \int_0^Q x dF(x) + pQ\bar{F}(Q)$$

公式右端的第一项表示来自自有资金的成本,第二项表示来自卖出货物可以足额偿还贷款本息的期望成本,第三项表示来自卖出货物不能足额偿还贷款本息的期望成本,第四项表示货物未能完全卖

出的期望收入,第五项表示货物全部卖出的期望收入。很显然, Maqbool Dada^[13]蕴含着报童只是用卖出货物所得货款来偿还银行本息,当卖出货物不足以偿还银行本息时,报童不再足额还款。这在实践中显然是不可取的。

为了克服 Maqbool Dada^[13]的不足,同时更加适合实践应用,我们将带有融资摩擦的报童优化利润目标函数写为:

$$\max_{Q > \eta/c} \pi_a = -\eta - B(1+r) - Kp \int_0^y (y-x) dF(x) + p \int_0^Q x dF(x) + pQ\bar{F}(Q) \quad (1)$$

其中,

$$y = \frac{(cQ - \eta)(1+r)}{p} = \frac{B}{m}, m = \frac{p}{1+r} \quad (2)$$

这里, m 表示卖出单位货物的折现收入。报童

卖出货物不足以偿还贷款本息的概率为 $F(y)$ 。 $\eta + B(1+r)$ 表示报童自有资金及偿还贷款本息的成本, $Kp \int_0^y (y-x)dF(x)$ 报童卖出货物不足以偿还贷款本息再筹集资金时的额外成本, 表示 $p \int_0^Q x dF(x) + pQ\bar{F}(Q)$ 表示报童的销售收入。

更进一步地, 公式(1)可以写为:

$$\pi_a = -\eta - py + p \int_0^Q x dF(x) + pQ\bar{F}(Q) - Kp \int_0^y (y-x)dF(x) = -\eta - py + p \int_0^Q \bar{F}(x) dx - Kp \int_0^y F(x) dx$$

其最优解可以完全使用 Karush - Kuhn - Tucker 条件得到。

命题 1: $\forall \eta < cQ_0$, 如果需求分布函数为 IFR (has an increasing failure rate, 失效率递增型), 报童的最优订购量 Q^* 由下式给出:

$$Q^* = \begin{cases} \frac{\eta}{c}, & \text{if } \frac{\eta}{c} > \bar{F}^{-1}\left(\frac{c}{m}\right); \\ \hat{Q}, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $m\bar{F}(\hat{Q} = c + KcF(y))$ (4)

当利率太高的时候, CCNV 仅仅使用自有资金而没有使用银行贷款, 公式(3)的第一种情况中发生了, 这就说明对于每一个给定的 η 都存在一个银行给出的利率上限。当利率较低的时候, CCNV 就会寻求额外的融资来订购 \hat{Q} , \hat{Q} 满足公式(4)。

我们给出了 CCNV 对利率的最佳反应, 接下来将考虑银行问题。作为 Stackelberg 博弈的主导者, 银行必将考虑 CCNV 对利率 r 或者 m 变化的反应。这种反应, 对公式(4)利用隐函数定理得到:

$$\frac{dy}{dm} = \frac{c\bar{F}[(\eta + my)/c] - myf[(\eta + my)/c]}{m^2 f[(\eta + my)/c] + Kc^2 f(y)} \quad (5)$$

(二) 银行问题的描述

银行决定利率 r 或者 m 来最大化收益的目标函数:

$$\max_r \pi_b = Br \quad (6)$$

利用公式(2), 公式(6)可写为:

$$\max_m \pi_b = (p-m)y \quad (7)$$

π_b 关于 m 的导数产生的一阶条件为:

$$\frac{d\pi_b}{dm} = -y^*(m) + (p-m) \frac{dy^*}{dm} = 0 \quad (8)$$

其中 m 由公式(5)给出。现在回顾命题 1 的公式(4)在可接受的 m 的范围, $\hat{Q} < Q_0$ 。因此, $c/p = \bar{F}(Q_0) < \bar{F}(\hat{Q} = c/m + KcF(y)/m)$ 。这就允许银行选择 m 使得 $y^*(m) > 0$ 。从而, 推导得到 $\frac{dy^*}{dm} =$

$\frac{y^*(m)}{p-m} > 0$ 。由于最优反应函数 $y^*(m)$ 是严格单调的, 这就保证了最优解的唯一性。这些结论总结如下。

命题 2: 如果 $F(\cdot)$ IFR, (a) 银行和报童之间的 Stackelberg 博弈有唯一的均衡点 (y^*, m^*) 满足公式(3)、(5)和(8), (b) $\hat{Q} < \bar{F}^{-1}(c/m^*) < Q_0 = \bar{F}^{-1}(c/p)$ 和 $\frac{dy^*}{dm^*} > 0$ 。

(三) 静态比较分析

我们已经建立了均衡的唯一性, 现在来做静态比较。这将产生关于 η 、 p 和 c 的如下静态比较:

命题 3: (a) 随着 η 的增加, y^* 、 B^* 和 r^* 减小, m^* 增加。(b) $\forall \eta$, 随着 p 的增加, y^* 、 B^* 、 \hat{Q} 、 r^* 和 m^* 增加。(c) $\forall \eta$, 随着 c 的增加, y^* 增加, 但 \hat{Q} 、 m^* 、 B^* 减少。

证明:

(a) 对公式(4)利用隐函数定理:

$$\frac{dm}{d\eta} = \frac{mf[\hat{Q}]}{c\bar{F}(\hat{Q}) - my^*f(\hat{Q})}$$

同时注意到:

$$\frac{dy^*}{dm^*} = \frac{c\bar{F}[\hat{Q}] - m^*y^*f[\hat{Q}]}{m^{*2}f[\hat{Q}] + Kc^2f(y^*)} > 0$$

在均衡状态, $c\bar{F}(\hat{Q}) - m^*y^*f(\hat{Q}) > 0$, 因此 $\frac{dm^*}{d\eta} > 0$, 从而 $\frac{dy^*}{d\eta} < 0$ 和 $\frac{dB^*}{d\eta} < 0$ 。

(b) 利用公式(2):

$$\frac{dy^*}{dp} = \frac{1}{1+r} \frac{dy^*}{dm^*} > 0, \quad \frac{dm^*}{dp} = \frac{1}{1+r} > 0。$$

因为 $\frac{dy^*}{dm^*} > 0$, $B^* = m^*y^*$, 且 $c\hat{Q} = \eta + B^*$, \hat{Q} 关于 p 可以立即得出。

(c) 我们对公式(8)用 $p/(1+r^*)$ 来代替 m^* 。利用隐函数定理得到:

$$\left[1 - \frac{1}{1+r^*}\right] \frac{dy^*}{dm} dp - \frac{p}{(1+r^*)^2} \frac{dy^*}{dm} dr = 0$$

从而, $\frac{dr^*}{dp} = \frac{r^*(1+r^*)}{p} > 0$ 。 y^* 、 \hat{Q} 、 B^* 、 m^* 关于 c 的单调性可采用上面同样的方式证明。

三、合作融资

就此可知, 假如 CCNV 不从银行贷款, 他只能订购 $Q_\eta = \eta/c$ 单位的货物, 且产生利润为 π_η 。如果报童获得银行均衡点所需的资金支持, 他的订购量就会超过 Q_η 但小于自有资金充足时的订购量 Q_0 (产生利润为 π_0)。因为我们假定了银行对 CCNV 设定了贷款利率 r , 这样均衡点就损失了自有资金充足时的效率。

在本节, 报童和银行通过合作集中贷款决策, 由提供一个适当的非线性贷款计划促使他们的利润之和 $\pi_a + \pi_b$ 达到最大化。则:

$$\max_Q (\pi_a + \pi_b) = -\eta - (cQ - \eta) - Kp \int_0^y (y-x)dF(x) + p \int_0^Q x dF(x) + pQ\bar{F}(Q) \quad (9)$$

由 $\pi_a + \pi_b$ 关于 Q 的一阶条件得到 $\bar{F}(Q) = c/p +$

$\frac{Kc}{m}F(y)$, 又知报童资金充足无贷款时的最优订购量 Q_0 满足 $\bar{F}(Q_0) = c/p$, 因此报童和银行合作的最优订购量 $Q_\eta < Q < Q_0$, 同时利润之和最大为 $\pi_\eta < \pi_a^* + \pi_b^* < \pi_0$ 。报童和银行合作其利润之和大于报童完全依赖于自有资金的利润。这里由于存在融资摩擦, 报童和银行合作其利润之和仍然小于报童资金充足无贷款时的利润, 其中摩擦丢失的利润为 $Kp \int_0^y F(x) dx$ 。

四、数例分析

我们假设需求 D 为定义在区间 $[a, b]$ 的均匀分布, 则有 $f(x) = \frac{1}{b-a}, F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \bar{F}(x) = \frac{b-x}{b-a}$, 标准差为 $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$, 均值为 $\mu = \frac{b+a}{2}$ 。

设 $c = 1, p = 2, a = 0, b = 1$, 并选取基本参数值 $\eta = 0.3, K = 0.1, r = 0.05$, 在实验过程中考察其中一个参数取值情况时, 另外两个参数保持不变。

(一) 报童、银行 Stackelberg 博弈模型

这里我们只给出给定银行利率, 报童主导优化的数例分析, 这种情况现实中应用较多。而银行主导利率变化, 要通过报童的反应来循环往复决定, 是一个 Stackelberg 博弈模型, 我们在文中已经证明了均衡的唯一性, 这里不再进行数例分析。

对于给定银行利率, 报童主导优化的模型, 由公式(3)得到最优订货量为:

$$Q^* = \begin{cases} \frac{\eta}{c}, & \text{若 } \frac{\eta}{c} > b - \frac{c}{m}(b-a); \\ \frac{m^2b - cbm + cam + K\eta c + Kamc}{Kc^2 + m^2}, & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

将公式(10)代入公式(1)即可计算出利润目标函数值。

K 变化时, Q^* 和利润目标函数值的变化如图1、图2所示。

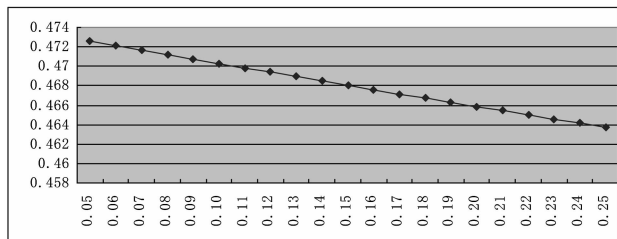


图1 最佳订购量 Q^* 随 K 的变化

从图1、图2中可以看出, 随着 K 的增加, 最佳订购量 Q^* 和利润目标函数值同时减小, 说明再融资摩擦系数越大, 报童最佳融资越少, 期望利润越少。因此, 减小再融资摩擦系数是增加报童订购量, 增加报童(企业)利润, 促进社会经济发展的有效途径。

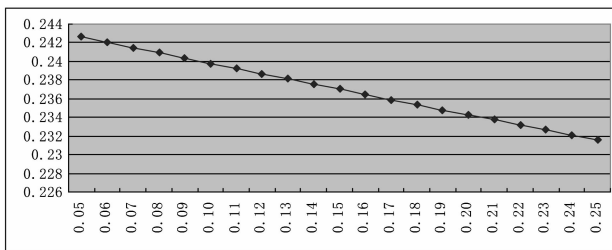


图2 利润目标函数值随 K 的变化

r 变化时, Q^* 和利润目标函数值的变化如图3、图4所示。

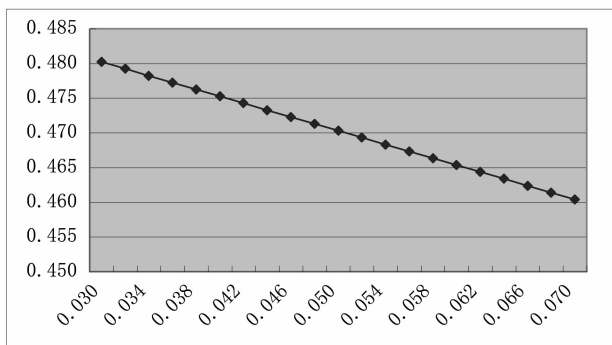


图3 最佳订购量 Q^* 随 r 的变化

从图3、图4中可以看出, 随着 r 的增加, 最佳订购量 Q^* 和利润目标函数值同时减小, 说明融资利率越大, 报童最佳融资越少, 期望利润越少。因此, 降低融资利率是增加报童订购量, 增加报童(企业)利润的有效途径。

η 变化时, Q^* 和利润目标函数值的变化如图5、图6所示。

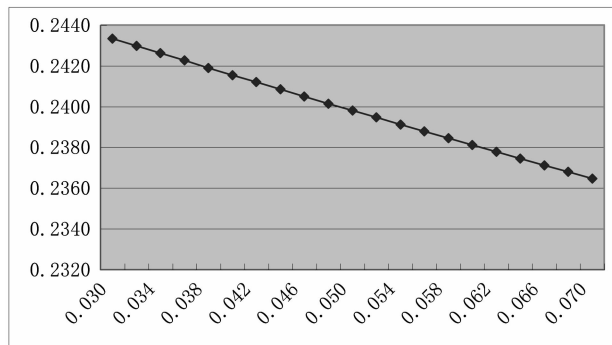


图4 利润目标函数值随 r 的变化

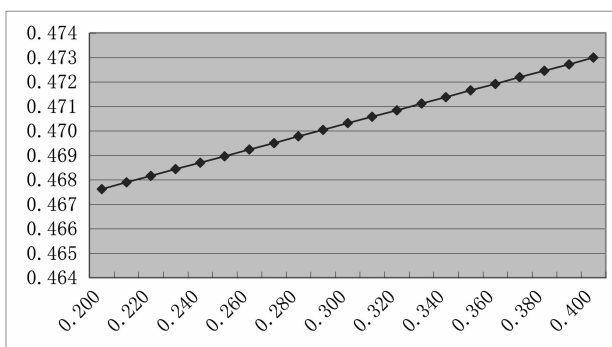


图5 最佳订购量 Q^* 随 η 的变化

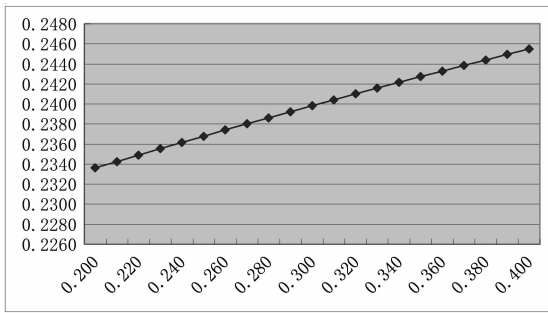


图6 利润目标函数值随 η 的变化

从图5、图6中可以看出,随着 η 的增加,最佳订购量 Q* 和利润目标函数值同时增加,说明自有资金越多,报童最佳订购越多,期望利润额越大。

(二)合作融资

对于报童、银行合作融资问题,由 π_a + π_b 关于 Q 的一阶条件 $\bar{F}(Q) = c/p + \frac{Kc}{m}F(y)$, 知 $Q^* = \frac{pb - cb + ca + Kcpa/m + Kcp\eta/m^2}{p + Kc^2p/m^2}$, 将 Q* 代入公式

(9)即可计算出合作融资的利润目标函数 π_a + π_b 的值。

K 变化时, Q* 和利润目标函数值的变化如图7、图8所示。

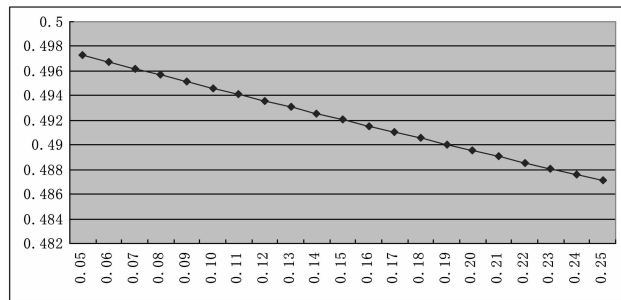


图7 最佳订购量 Q* 随 K 的变化

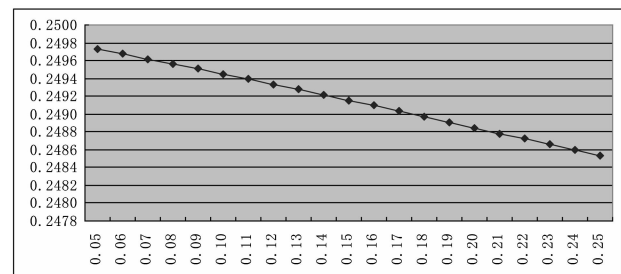


图8 总利润目标函数值随 K 的变化

从图5、图6中可以看出,随着 K 的增加,最佳订购量 Q* 和利润目标函数值同时减小,说明再融资摩擦系数越大,最佳合作融资越少,期望利润越少。

r 变化时, Q* 和利润目标函数值的变化如图9、图10所示。

从图9、图10中可以看出,随着 r 的增加,最佳订购量 Q* 和利润目标函数值同时稍微减小,说明融资利率 r 越大,最佳合作融资越少,期望利润越少,但减少的幅度要比不合作时小。

η 变化时, Q* 和利润目标函数值的变化如图11、图12所示。

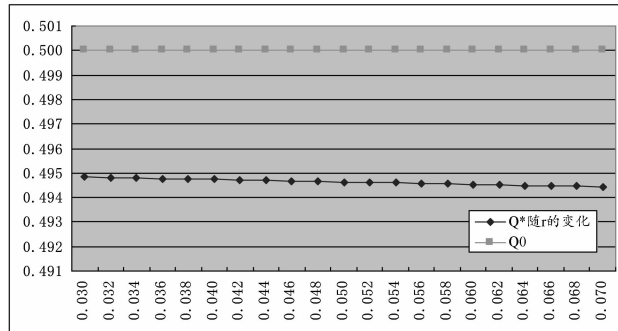


图9 最佳订购量 Q* 随 r 的变化

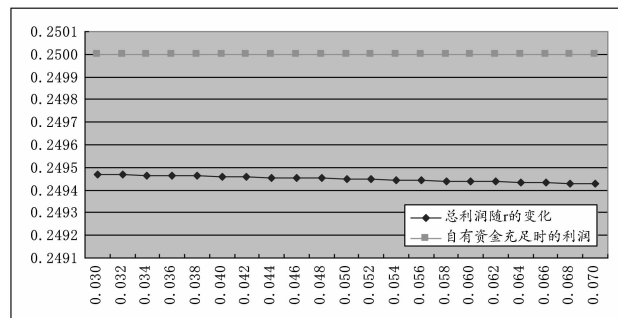


图10 总利润目标函数值随 r 的变化

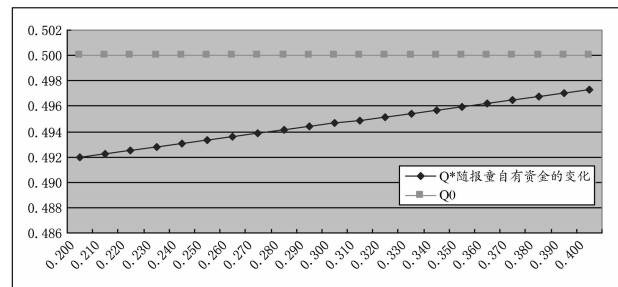


图11 最佳订购量 Q* 随 η 的变化

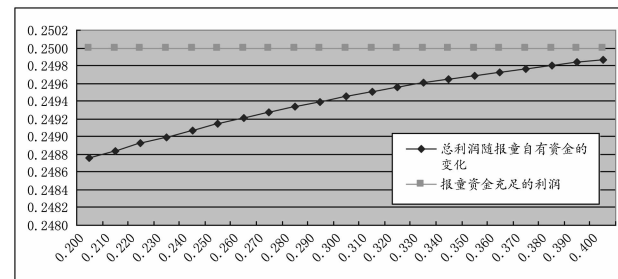


图12 总利润目标函数值随 η 的变化

从图11、图12中可以看出,随着 η 的增加,最佳订购量 Q* 和利润目标函数值同时增加,说明自有资金越多,报童最佳订购越多,总期望利润额越大,同时订购量要比不合作时大。因此,银行和报童合作贷款是增加报童订购量,增加银行和报童利润的有效途径,引入银行合作对报童融资问题有重要的意义。

综上所述,减小再融资摩擦、降低融资利率、银行和报童合作贷款是增加报童订购量,增加报童(企业)利润的有效途径,从而一定程度上有利于经济的

发展。因此,地方政府有必要为报童(企业)创造出良好的融资平台(较小的融资成本,较低的贷款利率),并促进银行和报童(企业)合作。

参考文献:

- [1] 万仲平,侯阔林,程露,蒋威. 报童问题的扩展模型[J]. 武汉大学学报(理学版),2008,54(3):259-266.
- [2] ERLEBACHER S J. Optimal and heuristic solutions for the multi-item newsvendor problem with a single constraint[J]. *Production and Operations Management*, 2000, 9: 303-318.
- [3] VAIRAKTARAKIS G L. Robust multi-item newsboy model with a budget constraint[J]. *International Journal of Production Economics*, 2000, 66(3): 213-226.
- [4] VAIRAKTARAKIS L. Robust multi-item newsboy models with a budget constraint[J]. *International Journal of Production Economics*, 2000, 66: 213-226.
- [5] ABDEL-MALEK L, MONTANARI R, MORALES L C. Exact, approximate, and generic iterative models for the multi-product newsboy problem with budget constraint[J]. *International Journal of Production Economics*, 2004, 91(2): 189-198.
- [6] ABDEL-MALEK L, MONTANARI R. An analysis of the multi-product newsboy problem with a budget constraint [J]. *International Journal of Production Economics*, 2005, 97: 296-307.
- [7] ABDEL-MALEK L, MONTANARI R. On the multi-product newsboy problem with two constraints [J]. *Computers & Operations Research*, 2005, 32(8): 2095-2116.
- [8] ABDEL-MALEK L, AREERATCHAKUL N. A quadratic programming approach to the multi-product newsvendor problem with side constraints[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 176(3): 1607-1619.
- [9] NIEDERHOFF J A. Using separable programming to solve the multi-product multiple ex-ante constraint newsvendor problem and extensions[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 176(2): 941-955.
- [10] DAS B, MAITI M. An application of bi-level newsboy problem in two substitutable items under capital cost[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 190: 410-422.
- [11] CHOU Shuo-Yan, PETERSON C J, HUNG Kuo-Chen. A note on fuzzy inventory model with storage space and budget constraints[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33: 4069-4077.
- [12] ZHANG Bin, XU Xiao-yan, HUA Zhong-sheng. A binary solution method for the multi-product newsboy problem with budget constraint[J]. *International Journal of Production Economics*, 2009, 117: 136-141.
- [13] MAQBOOL DADA, HU Qiao-hai. Financing newsvendor inventory[J]. *Operations Research Letters*, 2008, 36: 569-573.

News vendor Inventory with Re-financing Attrition

WU Jin-qi, WANG Yong

(College of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: Usually, loaning is one way to resolve the capital constraining problem of modern business enterprise. In this paper, we use bank loaning to solve capital-constrained newsvendor(CCNV) problem, and suppose to pay a certain additional cost (attrition cost) re-financing to pay off the bank capital and interest when the newsvendor's revenue is not enough, and also research the bank charging an interest rate according to the newsvendor's loaning. We prove that the re-financing attrition coefficient increase more the newsvendor ordering quantity reduce sharper and the expectation profits become less, so cutting the attrition cost is meaningful to increase the newsvendor ordering quantity and the expectation profits. Furthermore, we give the newsvendor and bank cooperating loan schedules, and point out that the cooperating loan schedules can increase the newsvendor ordering quantity in favor of the developing of society. Finally, we numerically investigate the influence of each factor to our problem via an example.

Key words: newsvendor problem; re-financing; attrition cost

(责任编辑 傅旭东)