

# 圆环壳在静水压下的应力 及位移计算\*

伍生龙 徐 磊 陈山林

**摘要** 本文应用已有的一般轴对称问题的结果, 计算了圆环壳在静水压作用下的应力和位移, 解答以Fourier级数形式给出, 文中给出了两个具体的算例。

**关键词** 圆环壳, 静水压

## 引 言

圆环薄壳由于其实用性及其理论的复杂性而一直受到研究者的注意。环壳一般轴对称问题的研究工作目前已基本解决。历史上, 这个问题首先由H. Reissner(1912)<sup>[1]</sup>和E. Meissner(1915)<sup>[2]</sup>成功地将其简化为两个实变量的二阶常微分方程。随后E. Tölke(1913)<sup>[3]</sup>、R. A. Clark(1950)<sup>[4]</sup>分别进行了复变量化的简化工作。他们得到的复变量方程在薄壳理论误差范围内是等价的<sup>[6]</sup>。近年来, 钱伟长和郑思梁<sup>[6,7]</sup>得到了Новожилов方程齐次解的一般解。陈山林<sup>[8]</sup>推广Новожилов变换, 对任意荷载作用下轴对称环壳问题的非齐次方程进行了成功的简化, 并且用Fourier级数求得方程的特解。结合现有的齐次方程一般解, 给出了一般轴对称问题的解答(精确解)。

本文应用文[8]的结果, 结合钱伟长、郑思梁(1980)<sup>[7]</sup>环壳轴对称问题齐次方程的一般解, 处理了静水压作用下圆环壳的应力和位移计算, 给出了两个具体算例, 分别是: (1)  $Q_0$ 可直接由平衡方程确定, 即 $Q_0$ 已知的情形, (2)  $Q_0$ 需由位移补充方程确定, 即 $Q_0$ 未知的情形。圆环壳常作为水下结构的一部分, 这时水压力是一个重要的荷载部分, 所以圆环壳承受静水压下的应力和位移计算具有工程实际意义。

静水压力荷载只考虑水面与 $\varphi = 0$ 处在同一高度的情形, 而水面高度高于或低于这一高度情形可以用本文结果与均匀内压结果叠加得到其应力及位移。

本文1988年6月22日收到。

\*四川省科学技术委员会应用基础专项经费资助。

### 1 基本方程、内力和变形

考虑在任意分布荷载 $p_r$ 、 $p_\theta$ 作用下的弹性圆环薄壳，其坐标、位移和几何尺寸如图1所示。

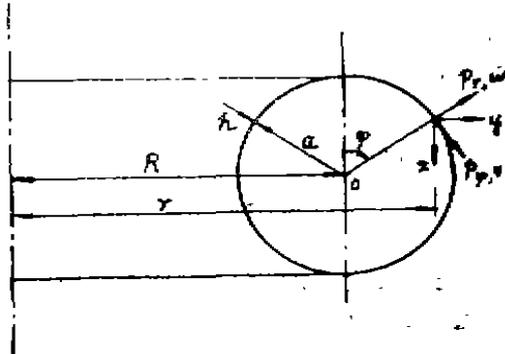


图1 环壳荷载位移和尺寸

$\nu$ ——泊松比，  $Q_0$ —— $\varphi = 0$ 处剪力，  $p_{r,0}$ ——表面法向荷载的均匀内压部分，  
 $p_{r,1} = p_r - p_{r,0}$ ， “.”表示对 $\varphi$ 求导。

复函数

$$V = (1 + \alpha \sin \varphi) \left( \frac{4\mu^2}{a} \cdot \frac{D}{a^2} x + \frac{2\mu}{a} \Phi i \right) - \frac{2\mu i}{a} \operatorname{ctg} \varphi \left[ Q_0 + a \int_0^\varphi (p_{r,1} \cos \varphi - p_\theta \sin \varphi) (1 + \alpha \sin \varphi) d\varphi \right] \quad (3)$$

式中

$x$ ——经线切线转角，

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad E \text{——杨氏模量}$$

$$\Phi = \frac{R(1+\alpha \sin \varphi)}{\sin \varphi} Q_\varphi \quad Q_\varphi \text{——剪力}$$

如果根据(1)和相应边界条件求得 $V$ ，则环壳内力和位移可按下述各式计算。

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{\alpha}{2\mu} \cdot \frac{\cos \varphi I_m V}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} + \frac{\alpha + \sin \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} (Q_0 + F) + \frac{2 + \alpha \sin \varphi}{2(1 + \alpha \sin \varphi)} a p_{r,0} \\ N_\theta &= -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{I_m V}{1 + \alpha \sin \varphi} \right)' - \frac{\alpha + \sin \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} (Q_0 + F) + \frac{\alpha}{2} p_{r,0} \\ &\quad + \frac{\alpha}{a} [ (\alpha + \sin \varphi) p_{r,1} + \cos \varphi p_\theta ] \\ M_\varphi &= \frac{\alpha a}{4\mu^2} \left\{ \left( \frac{ReV}{1 + \alpha \sin \varphi} \right)' + \frac{\alpha \nu \cos \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} ReV \right\} \\ M_\theta &= \frac{\alpha a}{4\mu^2} \left\{ \gamma \left( \frac{ReV}{1 + \alpha \sin \varphi} \right)' + \frac{\alpha \cos \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} ReV \right\} \\ Q_\varphi &= \frac{\alpha}{2\mu} \frac{\sin \varphi I_m V}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} + \frac{\cos \varphi}{(1 + \alpha \sin \varphi)^2} (Q_0 + F) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

问题的基本方程可以写作<sup>[8]</sup>

$$(1 + \alpha \sin \varphi) \ddot{V} - \alpha \cos \varphi \dot{V} + 2\mu i \sin \varphi V = \frac{4\mu^2}{a} \left( Q_0 + F - \frac{\alpha^2 i}{4\mu} a p_{r,0} \right) \cos \varphi + \frac{2\mu \alpha i}{a} \cdot (1 + \alpha \sin \varphi)^2 \{ [(\alpha + \sin \varphi) p_{r,1} + \cos \varphi p_\theta] + \alpha(1 + \nu) p_\theta \} \quad (1)$$

式中

$$F = a \int_0^\varphi (p_{r,1} \cos \varphi - p_\theta \sin \varphi) (1 + \alpha \sin \varphi) d\varphi \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{a}{R}, \quad \mu = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a^2}{Rh}$$

以及

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{aEh} \frac{ReV}{(1 + a\sin\varphi)} \\ y &= \frac{R}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi) (1 + a\sin\varphi) \\ Z &= Z_0 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R\cos\varphi ReV}{Eh (1 + a\sin\varphi)} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:

$N_\varphi, N_\theta$ ——径向、环向薄膜力,  $y, Z$ ——水平和铅直位移  
 $M_\varphi, M_\theta$ ——径向、环向弯矩,  $Z_0$ ——由位移 $Z$ 零位置( $\varphi = \varphi_0$ )规定决定。其正方向同文献[10]。

方程(1)是Новожилов型环壳复变量方程,右端是荷载项,其中 $Q_0$ 系 $\varphi = 0$ 处剪力,它分为两种情况:(1) $Q_0$ 可由整体平衡条件算出,(2) $Q_0$ 应由位移补充条件确定。

## 2 解 答

方程(1)的全解可以写作

$$V = V_0 + Q_0 V_0^* + V_1^* \quad (6)$$

其中 $V_0$ 为齐次解, $V_0^*$ 为 $Q_0$ 项的特解, $V_1^*$ 为非 $Q_0$ 项的特解。我们直接引述文[7]、[8]的有关结果。

$$V_0 = C_1' V_1 + C_2' V_2 \quad (7)$$

记  $C_1', C_2'$  为待定复常数,则有

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \exp[(\beta + i\gamma)(\varphi - \pi/2)] \cdot (k_1 + ik_2) \\ V_2 &= \exp[-(\beta + i\gamma)(\varphi - \pi/2)] \cdot (g_1 + ig_2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中,特征指数 $\lambda = \beta + i\gamma$ 与 $a, \mu$ 取值有关,文[7]已用表格给出其值,函数

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\varphi - q_n' \sin n\varphi) \\ k_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (p_n' \sin n\varphi + q_n \cos n\varphi) \\ g_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (p_n \cos n\varphi + q_n' \sin n\varphi) \\ g_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-p_n' \sin n\varphi + q_n \cos n\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} p_n &= (a_n + a_{-n})/2, & q_n &= (b_n + b_{-n})/2 \\ p_n' &= (a_n - a_{-n})/2, & q_n' &= (b_n - b_{-n})/2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

以及

$$C_n/C_0 = (a_n + ib_n)/2, \quad C_{-n}/C_0 = (a_{-n} + ib_{-n})/2 \quad (11)$$

而 $C_n$ 和 $C_{-n}$ 由下述递推关系确定

当 $n > 0$ 时

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{\mu - \alpha i [\lambda + i(n-1)][\lambda + i(n-2)]/2}{-(\lambda + in)^2 + \{\mu - \alpha i [\lambda + i(n+1)][\lambda + i(n+2)]/2\} C_{n+1}/C_n}$$

当 $n < 0$ 时

$$\frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{\mu - \alpha i [\lambda + i(n+1)][\lambda + i(n+2)]/2}{(\lambda + in)^2 + \{\mu - \alpha i [\lambda + i(n-1)][\lambda + i(n-2)]/2\} C_{n-1}/C_n} \quad (12)$$

当 $n = 0$ 时

$$\left[ \mu - \frac{\alpha}{2} i (\lambda - i)(\lambda - 2i) \right] \frac{C_{-1}}{C_0} - \left[ \mu - \frac{\alpha}{2} i (\lambda + i)(\lambda + 2i) \right] \frac{C_1}{C_0} + \lambda^2 = 0$$

如采用文〔7〕的 $\lambda$ 值, 则 $n = 0$ 的关系式自动满足。

记

$$V_1^* = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos n\varphi + B'_n \sin n\varphi) \quad (13)$$

并设方程(1)右端具有级数形式(非 $Q_0$ 项)

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\varphi + f'_n \sin n\varphi) \quad (14)$$

则 $V_1^*$ 之系数可由下述方程组求解\*

$$\left. \begin{aligned} (\mu i - \alpha) B'_1 &= f_0, & (\mu i - 3\alpha) B'_2 - B_1 &= f_1 \\ -B'_1 + 2\mu i B_0 + (3\alpha - \mu i) B_2 &= f'_1 \\ -B_n n^2 + \left[ \mu i - \frac{\alpha}{2} (n+2)(n+1) \right] B'_{n+1} \\ &+ \left[ \frac{\alpha}{2} (n-2)(n-1) - \mu i \right] B'_{n-1} &= f_n & (n \geq 2) \\ -B'_n n^2 - \left[ \mu i - \frac{\alpha}{2} (n+2)(n+1) \right] B_{n+1} \\ &- \left[ \frac{\alpha}{2} (n-2)(n-1) - \mu i \right] B_{n-1} &= f'_n & (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

记

$$V_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ \cos n\varphi + \sin n\varphi - (-1)^n (\cos n\varphi - \sin n\varphi) \right] \quad (16)$$

则系数 $A_n$ 可由下述方程组求解

$$\left. \begin{aligned} (\mu i - 3\alpha) A_2 - A_1 &= 2\mu^2/\alpha \\ n^2 A_n + (-1)^n \left[ \mu i - \frac{\alpha}{2} (n+2)(n+1) \right] A_{n+1} \\ &+ (-1)^n \left[ \frac{\alpha}{2} (n-2)(n-1) - \mu i \right] A_{n-1} &= 0 & (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这样我们就得到了方程(1)的全解

$$V = C_1' V_1 + C_2' V_2 + Q_0 V_0^* + V_1^* \quad (18)$$

式中,  $C_1'$ ,  $C_2'$  为待定复常数, 由边界条件决定。 $Q_0$  系  $\varphi = 0$  处的剪力值。当边界之一对竖向位移  $Z$  无约束时,  $Q_0$  可由整体平衡条件确定。在一般情况下, 则应由位移的补充条件, 即关于  $z$  的约束条件决定  $Q_0$  值。

不失一般性, 可假定对于边界  $\varphi = \varphi_1$  和  $\varphi = \varphi_2$  有

$$Z_2 = Z_1 - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R \cos \varphi \operatorname{Re} V}{Eh (1 + a \sin \varphi)} d\varphi$$

即

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi R_s V}{1 + a \sin \varphi} = \tilde{Z} \frac{Eh}{R} \quad (19)$$

式中,  $\tilde{Z} = Z_1 - Z_2$  为  $\varphi_1$  相对于  $\varphi_2$  边界的给定竖向位移。

若记

$$C_1' = d_1 + id_2, \quad C_2' = h_1 + ih_2 \quad (20)$$

则 (18) 式写作

$$V = d_1 V_1 + id_2 V_1 + h_1 V_2 + ih_2 V_2 + Q_0 V_0^* + V_1^* \quad (21)$$

代入位移补充条件 (19) 式, 并记

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi}{1 + a \sin \varphi} \operatorname{Re} V_1 d\varphi, & a_2 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi}{1 + a \sin \varphi} I_m V_1 d\varphi \\ b_1 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi}{1 + a \sin \varphi} \operatorname{Re} V_2 d\varphi, & b_2 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi}{1 + a \sin \varphi} I_m V_2 d\varphi \\ e_1 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi}{1 + a \sin \varphi} \operatorname{Re} V_0^* d\varphi, & e_2 &= \tilde{Z} \frac{Eh}{R} \\ e_3 &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi}{1 + a \sin \varphi} \operatorname{Re} V_1^* d\varphi \end{aligned}$$

有

$$Q_0 = \frac{a_1}{e_3} d_1 - \frac{a_2}{e_3} d_2 + \frac{b_1}{e_0} h_1 - \frac{b_2}{e_0} h_2 + \frac{e_1}{e_0} - \frac{e_2}{e_0} \quad (22)$$

于是方程全解写作

$$\begin{aligned} V &= \left( V_1 + \frac{a_1}{e_0} V_0^* \right) d_1 + i \left( V_1 + i \frac{a_2}{e_0} V_0^* \right) d_2 + \left( V_2 + \frac{b_1}{e_0} V_0^* \right) h_1 \\ &+ i \left( V_2 + i \frac{b_2}{e_0} V_0^* \right) h_2 + V_1^* + \left( \frac{e_1}{e_0} - \frac{e_2}{e_0} \right) V_0^* \end{aligned} \quad (23)$$

这样由边界条件确定待定复常数  $C_1'$ 、 $C_2'$  时, 我们使用 (23) 式,  $Q_0$  则由 (22) 式计算。

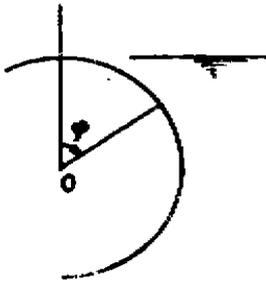


图 2

和

在不同荷载作用下，方程（1）仅右端非 $Q_0$ 项即 $f(\varphi)$ 不同。  
静水压作用下（图2），这时<sup>[8]</sup>

$$\left. \begin{aligned} p_\varphi &= 0, \\ p_{r_0} &= 0, \\ p_{r_1} &= -aq(1 - \cos\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$q$ 为液体比重。代入（2），（1）式得<sup>[8]</sup>

$$F = a^2q \left( \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \sin\varphi - \frac{\alpha}{3}\cos^3\varphi + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi \right) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{\mu^2}{3\alpha}a^2q[6\varphi + 3\sin 2\varphi - 12\sin\varphi - 4\alpha\cos^3\varphi + 4\alpha - 6\alpha\sin^2\varphi]\cos\varphi \\ &+ \frac{2\mu}{\alpha}ia^2q(1 + \alpha\sin\varphi)^2[\cos^2\varphi - \cos\varphi - \alpha\sin\varphi] \end{aligned} \quad (26)$$

注意到 $\varphi\cos\varphi$ 为非周期项，考虑实际环壳区域我们按 $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$ 区域展开：

$$\begin{aligned} \varphi\cos\varphi &= \sin\varphi_0 + \left( \varphi_0 + \pi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0 \right) \cos\varphi \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\sin(n+1)\varphi_0}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\varphi_0}{n-1} \right) \cos n\varphi \\ &- \frac{1}{2}\cos 2\varphi_0\sin\varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\cos(n+1)\varphi_0}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\varphi_0}{n-1} \right) \sin n\varphi \end{aligned} \quad (27)$$

于是我们得到（26）式的富氏系数：

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\mu^2}{2\alpha}a^2q(4\sin\varphi_0 - \alpha) + i\frac{\mu}{4\alpha}a^2q(4 - 7\alpha^2) \\ f_1 &= \frac{\mu^2}{6\alpha}a^2q\left[5\alpha + 12\left(\varphi_0 + \pi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0\right)\right] - i\frac{\mu}{2\alpha}a^2q(4 + \alpha^2) \\ f_2 &= \frac{2\mu^2}{3\alpha}a^2q(3\sin\varphi_0 + \sin 3\varphi_0 - \alpha) + i\frac{\mu}{\alpha}a^2q(1 + 2\alpha^2) \\ f_3 &= \frac{\mu^2}{2\alpha}a^2q(\alpha + 2\sin 2\varphi_0 + \sin 4\varphi_0) + i\frac{\mu\alpha}{2}a^2q \\ f_4 &= \frac{\mu^2}{30\alpha}a^2q(20\sin 3\varphi_0 + 12\sin 5\varphi_0 - 5\alpha) - i\frac{\mu\alpha}{4}a^2q \\ f_n &= \frac{2\mu^2}{\alpha}a^2q \left[ \frac{\sin(n+1)\varphi_0}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\varphi_0}{n-1} \right] \quad (n \geq 5) \\ f'_1 &= \frac{\mu^2}{2\alpha}a^2q(1 - 2\cos 2\varphi_0) - i\frac{\mu}{2}a^2q(2 + 3\alpha^2) \end{aligned} \quad (28)$$

$$f'_2 = -\frac{2\mu^2}{3a} a^2 q (3 + 3 \cos \varphi_0 + \cos 3 \varphi_0) - t 2 \mu a^2 q$$

$$f'_3 = -\frac{\mu^2}{2a} a^2 q (1 - 2 \cos 2 \varphi_0 - \cos 4 \varphi_0) + i \frac{\mu^2}{2} a^2 q (2 + a^2)$$

$$f'_n = -\frac{2\mu^2}{a} a^2 q \left[ \frac{\cos(n+1)\varphi_0}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\varphi_0}{n-1} \right] \quad (n \geq 4)$$

### 3 计算结果

做为本文的应用，我们编制了计算程序，在IBM-xt微机上分别计算了 $Q_0$ 已知和 $Q_0$ 未知两种情况。

例1：如图3，圆环壳受静水压力。

$R = 10m$ ,  $a = 2m$ ,  $h = 0.05m$ ,  $E = 2.1 \times 10^4 MPa$ ,  $\nu = 0.3$ , 水比重  $\gamma = 9.8 kN/m^3$ , 上边界  $\varphi_1 = 0^\circ$ , 边界自由, 下边界  $\varphi_2 = 180^\circ$ , 边界固定。由于上边界自由, 因此 $Q_0$ 是已知的, 即 $Q_0 = 0$ 。计算结果如图4所示。

例1表明：环向轴力远大于径向轴力，其绝对最大值是约10倍的关系，但是在固端处环向轴力小于径向轴力，这是约束的原故；环向弯矩小于径向弯矩，因为弯曲方向在径向；应力 $\sigma$ 主要依赖于弯矩，因此环向应力小于径向

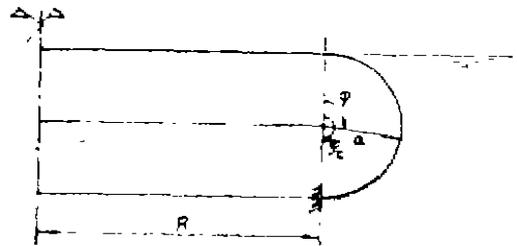


图 3

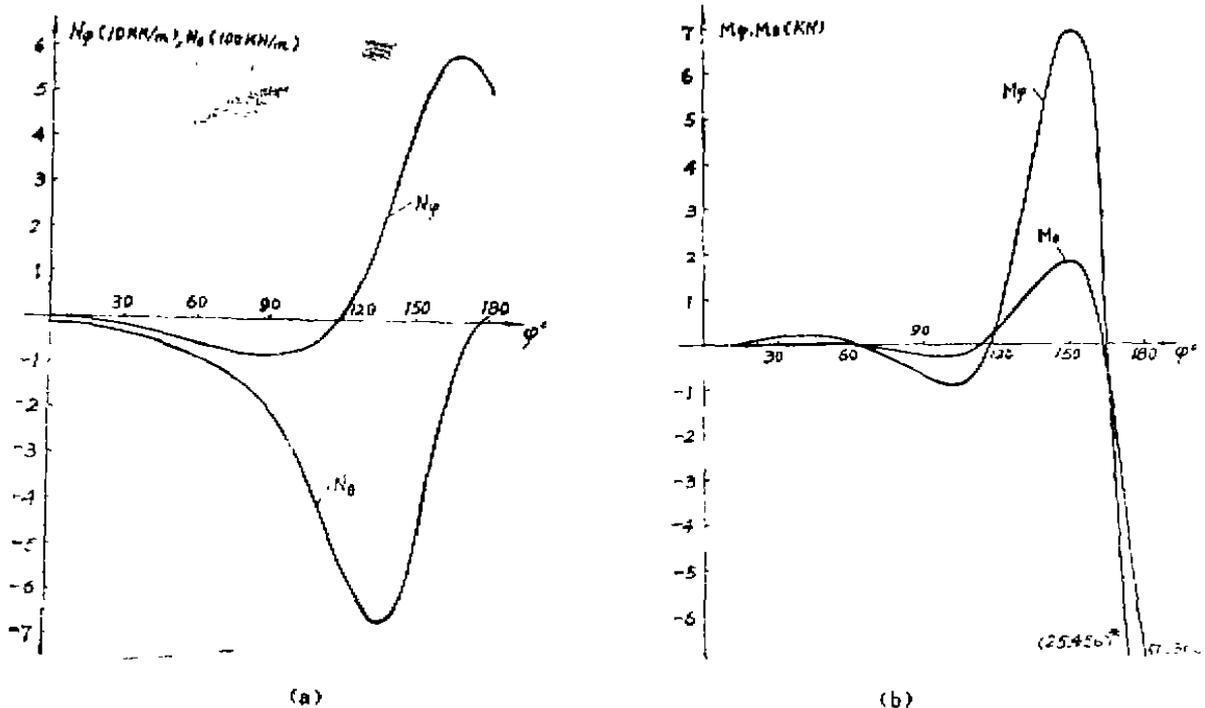
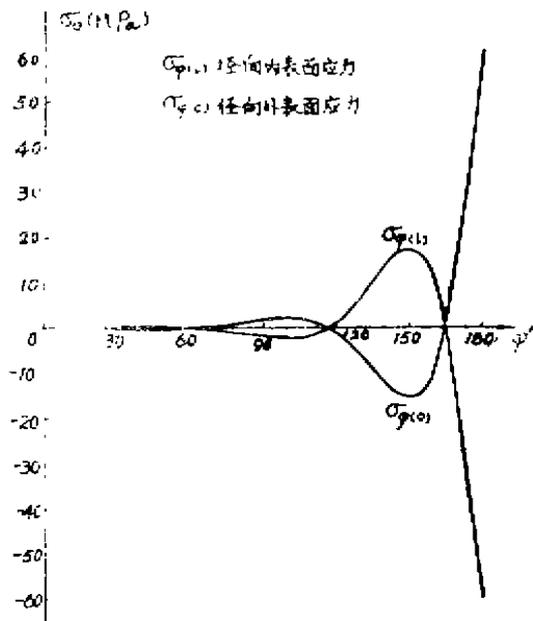
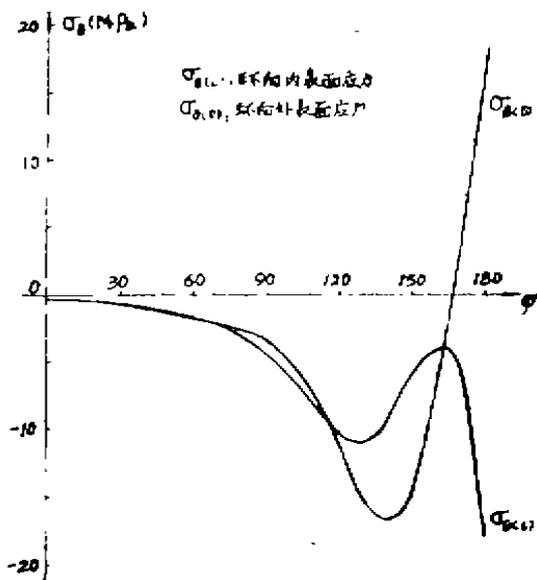


图 4 例 1

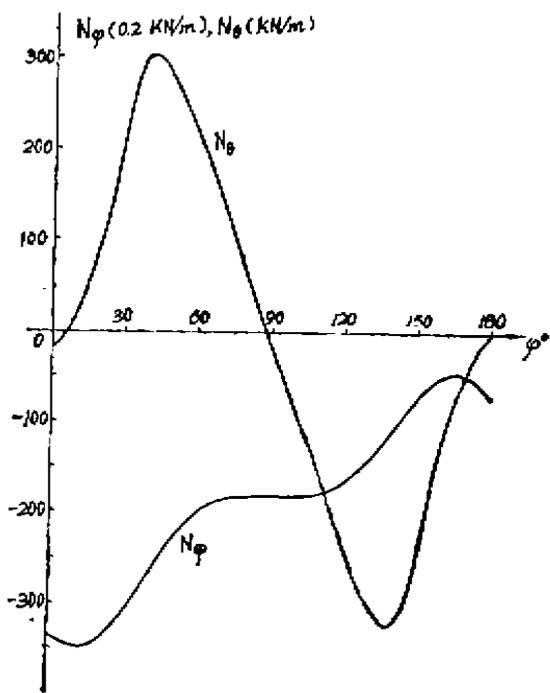


(c)

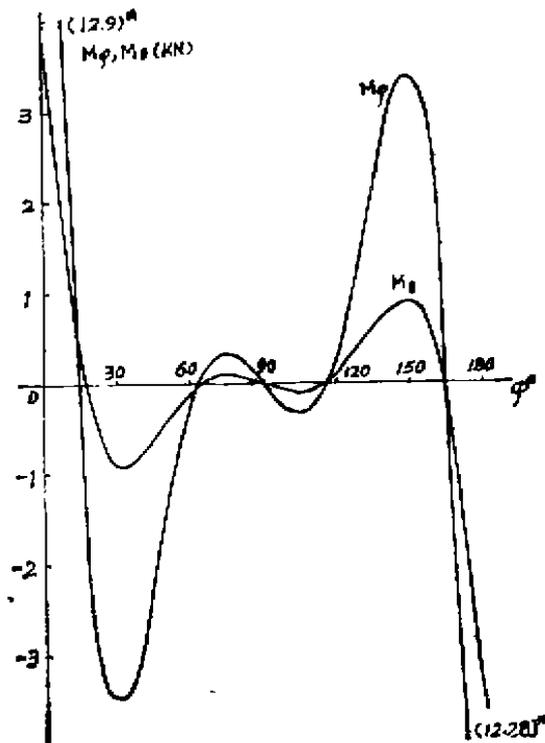


(d)

图4 例1



(a)



(b)

图5 例2

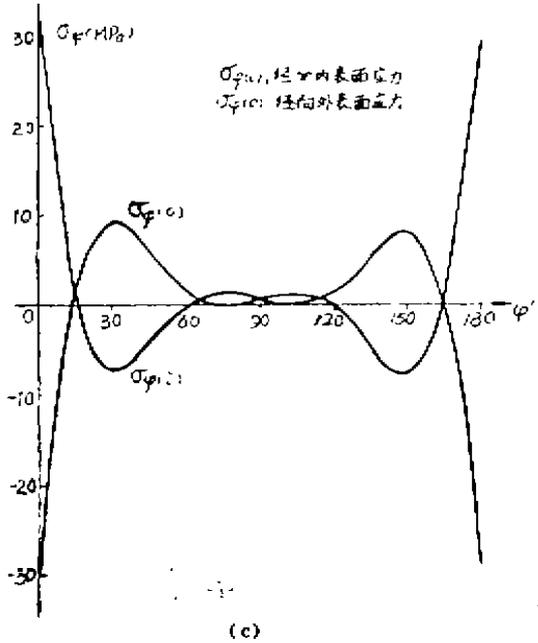


图 5 例 2

应力，内力、应力取最大值是在  $120^\circ - 180^\circ$  范围内，并且它也是内力、应力变化最大的区域；在  $165^\circ$  附近是弯矩应力变符号区，因此内力、应力都小。

例 2：几何尺寸和荷载都同例 1，仅上边界  $\varphi_1 = 0^\circ$ ，是固定。因此  $Q_0$  无法由平衡条件确定，其位移补充条件为：

$$\int_0^\pi \frac{\cos \varphi \operatorname{Re} V}{1 + \alpha \sin \varphi} = 0 \quad (29)$$

计算结果如图 5 所示。

例 2 表明：由于两端都固定，同例 1 比较，例 2 的内力和应力其变化趋势在  $90^\circ \sim 180^\circ$  内是相同的，而在  $0^\circ \sim 90^\circ$  内近似地，反向地加上  $90^\circ \sim 180^\circ$  内的内力和应力，所以其内力和应力近似地以  $90^\circ$  为反对称点（除  $N_0$  外）。

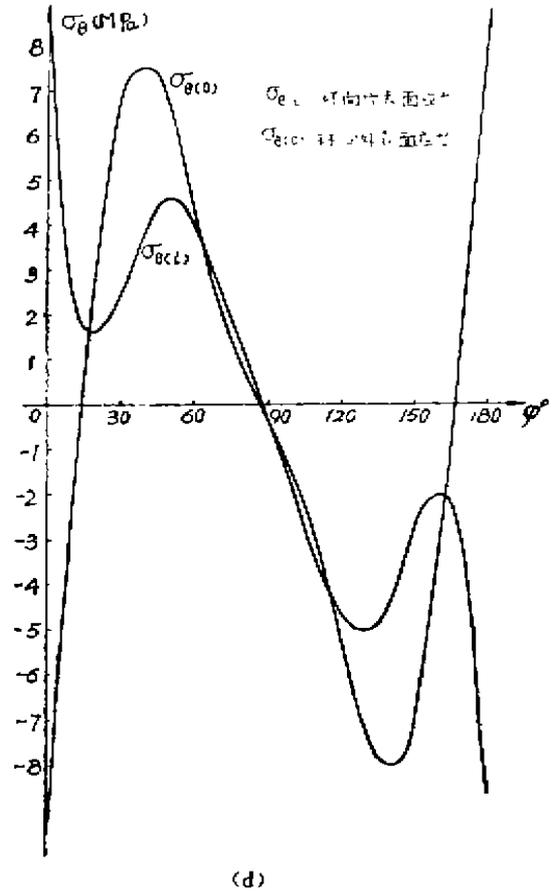
图中有 \* 括号内数字为相应边界弯矩值。

## 4 结 语

本文是文 [8] 的具体应用，因此结果适用于  $\alpha < 1$  的环壳。所编程序仅在微机上就达到非常满意的结果，具有工程实际意义。

### 参 考 文 献

- [1] Reissner, H., Müller-Breslau-Festschrift, Leipzig(1912), 181
- [2] Meissner, E., Physik. Zeits., 14(1913), 343



(d)

- [ 3 ] Tölke, F., *Ingenieur Archiv*, 9 (1938), 282
- [ 4 ] Clark, R. A., *J. Math. and Physics*, 29(1950), 146-178
- [ 5 ] Новожилов В. В., 《薄壳理论》, 科学出版社, 北京 (1959)
- [ 6 ] 钱伟长、郑思梁, 清华大学学报, 19 (1979), 27-47
- [ 7 ] 钱伟长、郑思梁, 应用数学和力学, 287-299(1980)
- [ 8 ] 陈山林, 应用数学和力学, 7, 5 (1986.), 425-434
- [ 9 ] 陈山林、王玳瑜、邹定祺, 应用数学和力学, 7, 6 (1986) 545-551
- [ 10 ] Flugge, W., *Stress in Shells*, 2ed, New York (1973)

(编辑: 刘家凯)

## THE STRESSES AND DISPLACEMENTS OF RING SHELLS UNDER HYDROSTATIC PRESSURE

*Wu Shenglong      Xu      Lei      Chen Shanlin*

**ABSTRACT** By means of previous solutions of the general axisymmetric problems of ring shells, the stresses and displacements of ring shells under hydrostatic pressure are studied in this paper. The results are given in the form of Fourier series. Two examples are calculated.

**KEY WORDS** ring shell, hydrostatic pressure