

含若干微元的钢筋混凝土 变刚度杆单元分析

张明 肖允徽

摘要 本文以含若干微元的钢筋混凝土变刚度杆作为研究对象。直接应用积分法确定截面的 $M-\varphi-N$ 关系及微元刚度，以考虑材料的非线性效应；应用凝聚法获得其杆端刚度系数及等效结点力；同时，综合考虑了轴力及大变形的几何非线性效应。本文为变刚度杆单元分析提供了一简便而精确的计算机分析方法。

关键词 变刚度杆，直接积分法，非线性，凝聚

前言

在钢筋混凝土框架全过程分析中，须综合考虑材料非线性及几何非线性的影响。材料非线性表现在刚度沿杆长方向随内力而变化，但目前要用一显函数式来表示这一变化规律尚不现实。一般均有必要将框架各杆件分为若干微元，各微元的刚度按杆件截面的弯矩-曲率-轴力 ($M-\varphi-N$) 关系确定。为了尽可能减少未知数个数，宜将杆件视为含若干微元的变刚度杆单元，如图1所示。例如，计算四跨五层框架，若将每个杆件划分为15个微元，每

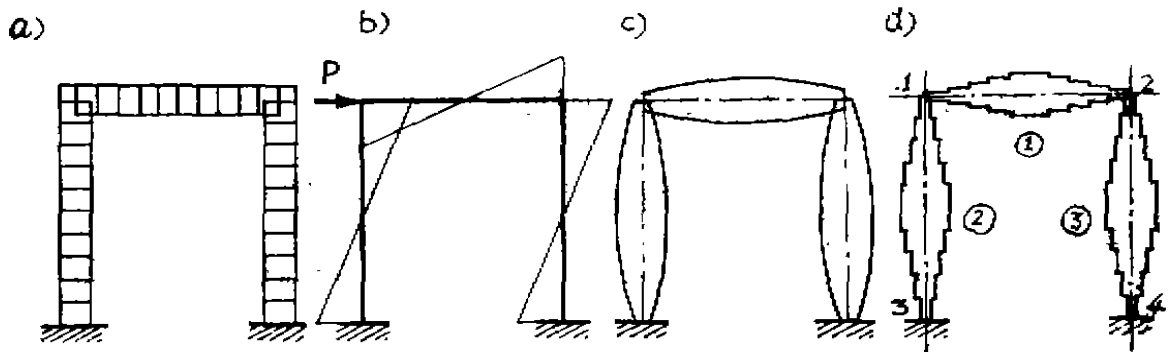


图1 含若干微元的变刚度杆单元(示意图)

(a) 将各杆件划分为若干微元 (b) 弯矩图 (c) 各杆刚度变化情况
(d) 将各杆视为含若干微元的变刚度杆单元

一微元看作一个单元，则结点数为660个，未知量达1980个，而包含15个微元的变刚度杆件视为一个变刚度杆单元，在一般超静定结构分析，则结点数为30个，未知量仅90个，较前者减少95.5%。

研究杆件截面的 $M-\varphi-N$ 关系以确定微元的刚度，是对变刚度杆单元进行单元分析的基础。目前，一些文献采用了各种简化模型，如三折线、四折线、抛物线加一段直线^[1]等。这些模型的近似性较大，同时，对大、小偏心受压情况其计算方法尚不统一；而另一些文献则采用数值积分法^[2]，所得刚度是双重近似的，且在电算过程中有时出现病态。本文则从材料的非线性应力—应变曲线出发，直接应用积分法确定截面的 $M-\varphi-N$ 关系，并求出随内力而变化的截面各切线抗弯刚度 $B_T = \frac{\partial M}{\partial \varphi}$ 和割线抗弯刚度 $B_S = \frac{M}{\varphi}$ 。这样，可使方法统一，计算简便，且所得微元刚度为精确值。

建立含若干微元的变刚度杆单元的刚度矩阵和等效结点力列阵，是实现钢筋混凝土框架全过程分析的一个关键部分，但也是一个很繁琐的问题。七十年代以来，国内外文献相继提出了一些解决方法。诸如：(1)用柱比法推导变刚度杆的刚度系数和固端反力的公式^[1]；(2)用虚功原理推导刚度系数公式和利用共轭梁上虚拟荷载的平衡条件推导固端反力的公式^[2]；(3)将变刚度杆视为一具有 $n+1$ 个结点、 n 根等刚度杆的结构，用位移法推导其公式^[3]等。以上三种方法均循推导公式的途径求解，其推导过程及程序设计较繁，而且前两种方法均不便于考虑轴力对杆端刚度系数的影响，亦无法确定支座沉陷、温度变化等广义荷载的结点力。

本文将凝聚法应用于含若干微元的变刚度杆的单元分析，无须推导杆单元刚度系数公式和等效结点力公式，而利用计算机程序自动形成。具体作法是：(1)据微段内力，按直接积分求得的 $M-\varphi-N$ 关系确定每一微元的刚度，以考虑材料非线性的影响，并参考文献[6]写出综合考虑轴力及大变形几何非线性效应的增量单元刚度矩阵，参照文献[4]写出等效结点力列阵；(2)装配成该变刚度杆的总刚度矩阵和总等效力列阵；(3)用凝聚法将该杆中间各结点的多余自由度“凝聚”掉，即可得到含若干微元的变刚度杆单元的单元刚度矩阵 $[KE]$ (6×6 阶)和等效结点力列阵 $\{PE\}$ (6×1 阶)；(4)利用转换矩阵 $[T]$ ，将 $[KE]$ 和 $\{PE\}$ 从局部座标转换到整体座标。

1 确定截面的 $M-\varphi-N$ 关系及微元刚度

本文应用直接积分法和微分法确定截面的 $M-\varphi-N$ 关系及微元刚度。

1.1 基本假定

1) 含 n 个微元的变刚度杆单元，如图2(a)所示；第 i 个微元的各种几何参数，如图(b)所示。

2) 材料本构关系，如图3和图4所示。

3) 符合平截面变形假定，且当截面受压边缘最大应变超过混凝土极限压应变 ϵ_c 时，即认为截面破坏。

1.2 积分公式推导

按以上假定，截面上的应变分布分别有以下七种情况，如图5所示。

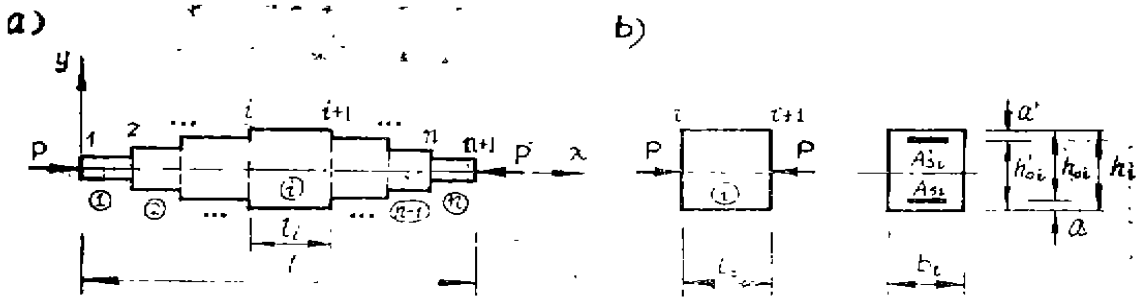


图2 变刚度杆单元编号及其几何参数

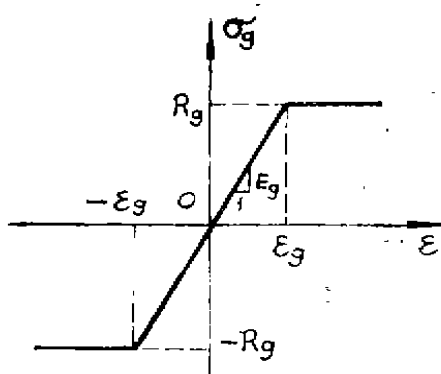


图3 钢筋应力-应变关系

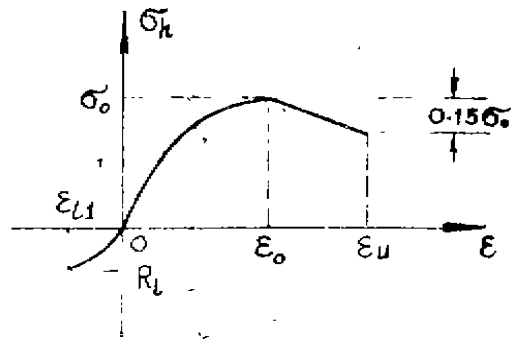


图4 混凝土应力-应变关系 (Hognestad 建议曲线)

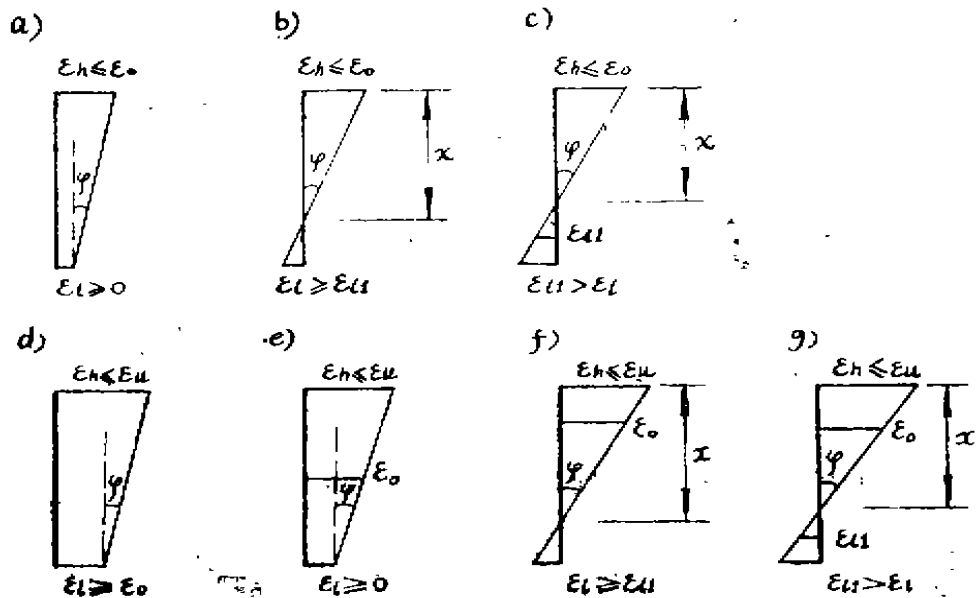


图5 截面上应变分布情况

图中, ϵ_h 和 ϵ_l 分别为混凝土受压及受拉边缘的混凝土应变, φ 为曲率, 其余符号同前。

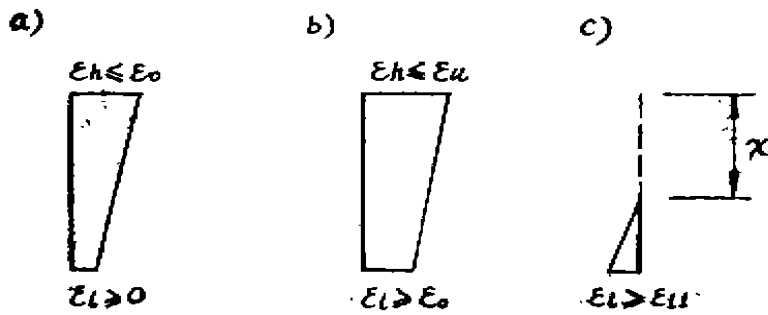


图6 截面上应变分布情况分解图

对应于图6中(a)应变分布的轴力和弯矩公式为:

$$N_{h1} = \int_{\epsilon_l}^{\epsilon_h} \sigma_0 b_i \left(\frac{2\epsilon}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2} \right) \frac{d\epsilon}{\varphi}$$

$$= \sigma_0 \frac{b_i}{\varphi} \left(\frac{\epsilon_h^2 - \epsilon_l^2}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_h^3 - \epsilon_l^3}{3\epsilon_0^2} \right) \quad (1)$$

$$M_{h1} = \int_{\epsilon_l}^{\epsilon_h} \sigma_0 b_i \frac{\epsilon}{\varphi} \left(\frac{2\epsilon}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2} \right) \frac{d\epsilon}{\varphi}$$

$$= \sigma_0 \frac{b_i}{\varphi^2} \left[\frac{2(\epsilon_h^2 - \epsilon_l^2)}{3\epsilon_0} - \frac{\epsilon_h^4 - \epsilon_l^4}{4\epsilon_0^2} \right] \quad (2)$$

而对应于图6中(b)应变分布的轴力和弯矩公式为:

$$N_{h2} = \int_{\epsilon_l}^{\epsilon_h} \sigma_0 b_i \left(1 - 0.15 \times \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right) \frac{d\epsilon}{\varphi}$$

$$= \sigma_0 \frac{b_i}{\varphi} \left[\epsilon_h - \epsilon_l - 0.15 \times \frac{0.5(\epsilon_h^2 - \epsilon_l^2) - \epsilon_0(\epsilon_h - \epsilon_l)}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right] \quad (3)$$

$$M_{h2} = \int_{\epsilon_l}^{\epsilon_h} \sigma_0 b_i \frac{\epsilon}{\varphi} \left[1 - 0.15 \times \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right] \frac{d\epsilon}{\varphi}$$

$$= \sigma_0 \frac{b_i}{\varphi^2} \left[0.5(\epsilon_h^2 - \epsilon_l^2) - 0.15 \times \frac{\frac{1}{3}(\epsilon_h^3 - \epsilon_l^3) - \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon_h^2 - \epsilon_l^2)}{\epsilon_u - \epsilon_0} \right] \quad (4)$$

将以上 N_{hi} 和 M_{hi} ($i=1,2$) 分别对 ϵ_h 、 φ 求偏导数, 可得: $N_{Ehi} = \frac{\partial N_{hi}}{\partial \epsilon_h}$,

$N_{Fhi} = \frac{\partial N_{hi}}{\partial \varphi}$, $M_{Ehi} = \frac{\partial M_{hi}}{\partial \epsilon_h}$ 和 $M_{Fhi} = \frac{\partial M_{hi}}{\partial \varphi}$ ($i=1,2$) 的计算公式(5)~(12)。

再将公式中的 σ_0 、 ϵ_h 、 ϵ_l 和 ϵ_0 分别代之以变量 R 、 α 、 ϵ_1 和 ϵ_2 。在计算受拉区混凝土

其实, 图5中的七种应变分布, 均可由以下图6所示的三种应变分布情况组合而成。而且, 图6中(a)和(c)两种情况的应力-应变关系式, 在表达形式上是相似的, 只须在对应公式中, 将受压的应力和应变代换成受拉的应力和应变即可。

合力时, $R = R_i$, $\varepsilon = \varepsilon_i$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{i1}$; 在计算受压区混凝土合力时, $R = \sigma_0$, $\varepsilon = \varepsilon_h$ 或 ε_0 , $\varepsilon_1 = \varepsilon_i$ 或 0 , $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ 。由此, 可写出图 5 中(a)~(g)共七种情况混凝土的轴力、弯矩及其对 ε_h 、 φ 的偏导数值。例如, 对于图(g), 有:

$$N_h = N_{h1}(\sigma_0, \varepsilon_0, 0, \varepsilon_0) + N_{h2}(\sigma_0, \varepsilon_h, \varepsilon_0, \varepsilon_0) + N_{h1}(R_i, \varepsilon_i, 0, \varepsilon_{i1}) \quad (13)$$

$$N_{Eh} = N_{Eh2}(\sigma_0, \varepsilon_h, \varepsilon_0, \varepsilon_0) \quad (14)$$

$$N_{Fh} = N_{Fh1}(\sigma_0, \varepsilon_0, 0, \varepsilon_0) + N_{Fh2}(\sigma_0, \varepsilon_h, \varepsilon_0, \varepsilon_0) + N_{Fh1}(\sigma_0, \varepsilon_i, 0, \varepsilon_{i1}) \quad (15)$$

$$M_h = M_{h1}(\sigma_0, \varepsilon_0, 0, \varepsilon_0) + M_{h2}(\sigma_0, \varepsilon_h, \varepsilon_0, \varepsilon_0) + M_{h1}(R_i, \varepsilon_i, 0, \varepsilon_{i1}) \quad (16)$$

$$M_{Eh} = M_{Eh2}(\sigma_0, \varepsilon_h, \varepsilon_0, \varepsilon_0) \quad (17)$$

$$M_{Fh} = M_{Fh1}(\sigma_0, \varepsilon_0, 0, \varepsilon_0) + M_{Fh2}(\sigma_0, \varepsilon_h, \varepsilon_0, \varepsilon_0) + M_{Fh1}(R_i, \varepsilon_i, 0, \varepsilon_{i1}) \quad (18)$$

同理, 可写出图 5 中(a)~(f)对应的应变分布的相应公式。

钢筋的轴力、弯矩及其对 ε_h 、 φ 的偏导数亦很容易写出, 这里不再赘述。

将以上混凝土与钢筋各对应量迭加, 即可得截面的轴力、弯矩及其对 ε_h 、 φ 的偏导数值, 即

$$N = N_h + N_g + N'_g \quad (19)$$

$$N_E = N_{Eh} + N_{Eg} + N'_{Eg} \quad (20)$$

$$N_F = N_{Fh} + N_{Fg} + N'_{Fg} \quad (21)$$

$$M = M_h + M_g + M'_g \quad (22)$$

$$M_E = M_{Eh} + M_{Eg} + M'_{Eg} \quad (23)$$

$$M_F = M_{Fh} + M_{Fg} + M'_{Fg} \quad (24)$$

式中, 下标 E 和 F 分别表示 N 或 M 对 ε_h 和 φ 的偏导数。

1.3 截面的 M - φ - N 关系

若截面上的轴力和弯矩已事先求出, 分别为 N_s 和 M_s 。为求得与之对应的 ε_h 和 φ , 可先假定 ε_{h0} 和 φ_0 值, 代入(19)式和(22)式, 计算 N 和 M , 再判断是否满足以下(25)和(26)式:

$$\frac{|\Delta N|}{N} = \frac{|N - N_s|}{N_s} \leq \Delta_1 \quad (25)$$

$$\text{和} \quad \frac{|\Delta M|}{M} = \frac{|M - M_s|}{M_s} \leq \Delta_2 \quad (26)$$

式中, Δ_1 和 Δ_2 均为所要求的精度。如不满足, 可将 ε_{h0} 和 φ_0 代入(20), (21)和(23), (24), 求得 N_E , N_F 和 M_E , M_F , 从而可按以下(27)~(30)式, 得到 ε_{h0} 和 φ_0 的修正值 ε_{h1} 和 φ_1 。

$$\Delta \varepsilon_{h0} = \Delta N \cdot \frac{\partial \varepsilon_{h0}}{\partial N} + \Delta M \cdot \frac{\partial \varepsilon_{h0}}{\partial M} = \frac{\Delta N}{N_E} + \frac{\Delta M}{M_E} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_0 &= \Delta N \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial N} + \Delta M \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial M} \\ &= \frac{\Delta N}{N_F} + \frac{\Delta M}{M_F} \end{aligned} \quad (28)$$

为了便于组装,在程序中可将微元的单元刚度矩阵设为三维数组,第三个下标变量设为微元单元号。这样,便于将杆件总刚元素与各微元单刚元素一一对应起来。下面(35)~(40)式是拼装杆件总刚 $[KE]$ 的对应公式。

$$KE(I,J) = K(I,J,1) \quad ((I=1,3), J=1,I) \quad (35)$$

$$KE(I-3,J+3) = K(I+3,J+3,n) \quad ((I=1,3), J=1,I) \quad (36)$$

$$KE(3L+I,3L+J) = K(I+3,J+3,L-1) + K(I,J,L) \\ \quad \quad \quad ((I=1,3), J=1,I), L=2,n) \quad (37)$$

$$KE(I+6,J) = K(I+3,J,1) \quad ((I=1,3), J=1,3) \quad (38)$$

$$KE(3n+I,J+3) = K(I,J+3,n) \quad ((I=1,3), J=1,3) \quad (39)$$

$$KE(3L+3+I,3L+J) = K(I+3,J,L) \\ \quad \quad \quad ((I=1,3), J=1,3), L=2,n-1) \quad (40)$$

式中,常数 n 为微元总个数。以上所形成的 KE 元素为其下三角部分,上三角部分可根据对称性自动形成。

为了便于应用凝聚法,在组装 $[KE]$ 时,宜将杆件两端结点(即1点和 $n+1$ 点)的刚度系数放在矩阵最前面 6×6 阶;在组装杆件总荷载列阵 $\{PE\}$ 时,亦宜将杆件两端结点的等效结点力放在该列阵的最前面 6×1 阶。

3 确定变刚度杆单元的杆端刚度系数及等效结点力

以上所得变刚度杆总刚度矩阵(34)式,包含了两个杆端结点和 $(n-1)$ 个内部结点,即包含6个杆端自由度和 $3(n-1)$ 个内部自由度。为获得该变刚度杆单元的杆端刚度系数,须在拼装结构总刚度矩阵之前,将这些内部自由度消去,此过程即称之为“凝聚”^[5]。

将变刚度杆的总刚度矩阵分块如下,其中 $\{f_1\}$ 表示欲求的杆端自由度,而 $\{f_2\}$ 为拟消去的内部自由度。

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

首先对 $\{f_2\}$ 求解,再以 $\{f_1\}$ 表示 $\{f_2\}$,有:

$$\{f_2\} = [k_{22}]^{-1} (\{P_2\} - [k_{21}]\{f_1\}) \quad (42)$$

$$([k_{11}] - [k_{12}][k_{22}]^{-1}[k_{21}])\{f_1\} = \{P_1\} - [k_{12}][k_{22}]^{-1}\{P_2\} \quad (43)$$

$$\text{令} \quad [KK] = [k_{11}] - [k_{12}][k_{22}]^{-1}[k_{21}] \quad (44)$$

$$[PP] = \{P_1\} - [k_{12}][k_{22}]^{-1}\{P_2\} \quad (45)$$

$$\text{则有} \quad [KK]\{f_1\} = [PP] \quad (46)$$

式中, $[KK]$ 即为凝聚后的杆单元刚度矩阵, $[PP]$ 即为凝聚后的等效结点力列阵。

由此,可写出求解 $[KK]$ 和 $[PP]$ 的凝聚过程,其框图如图7所示。

尚须指出,以上框图适用于对称的总刚度矩阵,若用于非对称矩阵,须在J循环中用L代替M。

按以上凝聚过程所获得的 $[KE]$ 矩阵和 $\{PE\}$ 列阵的前 6×6 阶子矩阵和前 6×1 阶子矩阵,即为所求变刚度杆单元分析的单元刚度矩阵 $[KK]$ 和等效结点力列阵 $\{PP\}$ 。

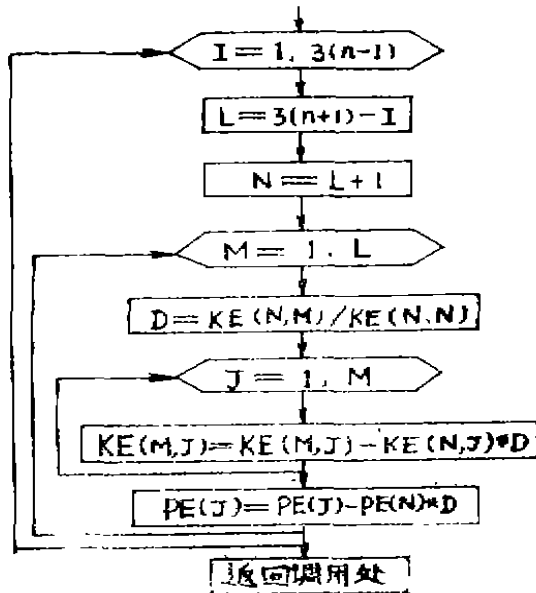


图7 凝聚过程框图

为了将以上所求得的 $[KK]$ 和 $\{PP\}$ 从局部动坐标系转换到整体坐标系下, 须利用转换矩阵 $[T]$ 。当采用线性增量法和非线性增量法时, $[T]$ 须用开始施加该级荷载时的已变形的几何尺寸形成。

4 结束语

本文对含若干微元的钢筋混凝土变刚度杆所采用的单元分析方法, 物理概念清楚, 计算比较简便, 结果更为精确, 且易于在计算机上实现。不仅综合考虑了材料非线性和几何非线性效应, 而且通用性强。本方法已在西门子7570-C计算机上实现, 程序框图如图8所示。

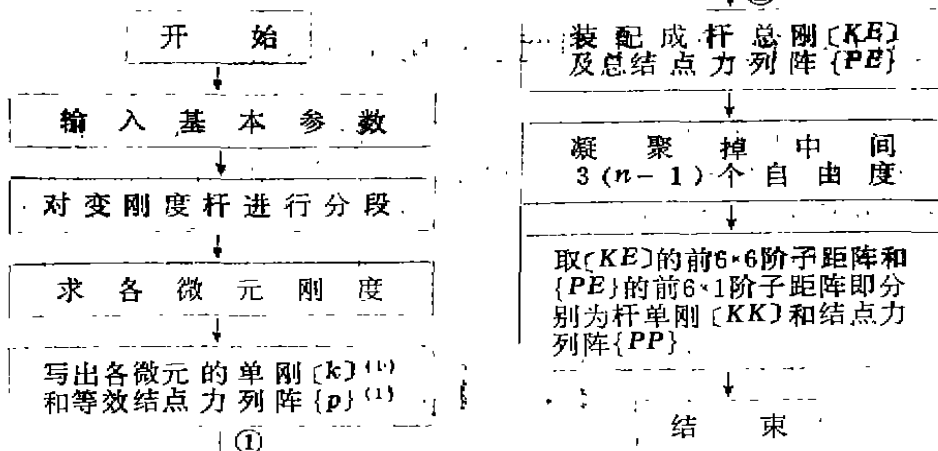


图8 变刚度杆单元分析框图

致 谢

本文在写作过程中, 得到刘南科教授的悉心指导以及周基岳副教授和几位研究生的热情帮助; 在程序调试过程中, 得到重庆建筑工程学院计算中心同志们的大力支持, 在此一并表示衷心的感谢。

[1] A·格哈利: 《结构分析》, 人民铁道出版社, 1978年

[2] 刘南科、周基岳、肖允徽: 钢筋混凝土框架非弹性分析及试验研究, 《重庆建筑工程学院学报》, 第3期, 1984

[3] 向阳: 《框架非线性分析中的二阶效应及锚固钢筋滑移问题》, 重庆建筑工程学院硕

士研究生论文, 1985年

- [4] 肖允徽、张来仪: 《平面杆系结构静力分析程序》, 重庆建筑工程学院, 1984年
- [5] Robert D. Cook: 《Concepts and Applications of Finite Element Analysis》, John & Sons, Inc, 1974
- [6] Alexander Chajes, James E. Churchill: 《Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods》, Journal of Structural Engineering, 1987, 6
- [7] 周基岳、刘南科: 钢筋混凝土框架非线性分析中的截面弯矩—曲率关系, 《重庆建筑工程学院学报》, 第2期, 1984
- [8] 冯世平: 《钢筋混凝土框架结构屈服后性能的研究》, 清华大学博士论文详细摘要, 1985.4
- [9] 黄振国: 钢筋混凝土连续梁和框架的非线性计算, 《郑州工学院学报》, 第2期, 1985

(编辑: 徐维森)

ELEMENT ANALYSIS OF VARYING STIFFNESS MEMBER INCLUDING SOME SMALL SEGMENTS

Zhang Ming Xiao Yunhui

ABSTRACT This paper deals with varying stiffness RC member including some small segments. The $M-\phi-N$ relationship of the cross section and the stiffness of the small segment, which refers the material nonlinear properties, are developed directly by integral method. And the condensation method is adopted to calculate the stiffness coefficients of the member ends and equilibrium loads. Simultaneously, the geometrical nonlinear effects by both of the axial loads and large deformation are considered. This paper provides a simple and accurate computer analysis method for varying stiffness member including some small segments.

KEY WORDS varying stiffness member, direct integral method, nonlinear properties, condensation