重庆建筑工程学院学报
第11卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.11 No.1
1989年3月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING March 1989

Марков决策规划对商品经济发展的预测

杨春巍

提要 本文用Марков决策规划理论研究了商品流通中的转移概率、转移矩阵、市场占有分布和顾客流动的转移概率。提出了商品经济中重要的市场占有率及期望利润的科学预测的理论及方法。

关键词 转移概率、转移矩阵，市场占有分布，马尔科夫决策规划，商品经济

引言

人类在认识自然，征服自然，改造客观世界，最有魅力之事，莫过于人能够预测系统的未来，并能控制系统未来的发展。Марков决策规划就是研究、控制Марков型随机系统未来发展的科学。

Марков决策规划在经济领域中的应用尽管是近几年才开始起步的，特别在我国研究这类问题的人更少，但是随着商品经济在我国的发展，对管理现代化、决策科学化的要求越来越高，无庸置疑，它的应用范围将越来越广泛，越来越深入。将越来越受到重视。

1 Марков过程性质及固定概率向量

1.1 转移概率和转移矩阵

若某人过去一段时期所使用过的三种牌子的某一种日用品，分别记为X、Y、Z。使用的情况是：

(1) 在用完X之后

a. 下一次选择X的概率为0，

b. 下一次选择Y的概率为$\frac{1}{2}$，

c. 下一次选择Z的概率为$\frac{1}{2}$；

(2) 在用完Y之后

a. 下一次选择X的概率为$\frac{1}{5}$，

b. 下一次选择Y的概率为$\frac{2}{5}$，

c. 下一次选择Z的概率为$\frac{2}{5}$；

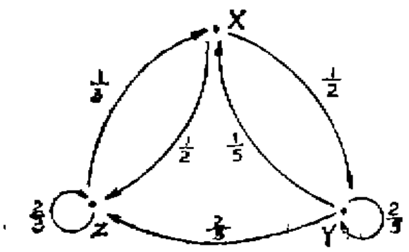
本文1987年2月10日收到

（3）在用完 Z 之后

a. 下一次选择 X 的概率为 $\frac{1}{3}$，

b. 下一次选择 Y 的概率为 0，

c. 下一次选择 Z 的概率为 $\frac{2}{3}$，



它们的转移图是

设 X 为状态 1，Y 为状态 2，Z 为状态 3，则这问题移矩阵为的转

$$P=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3\end{array}$$

若此人第二次，第三次仍使用该日用品，要考虑选择三种牌子中的每一种的概率（即绝对分布）。对于上述的问题，他第一次是使用 X，所以初始分布为 $P_0=[1\ 0\ 0]$。若他开始时机会均等地去选择三种牌子的任一种，则初始分布为 $P_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$。由初始分布 P_0 和转移矩阵 P 可以得出他第一次使用 X 后选择 X、Y、Z 的概率向量为 P_1。即

$$P_1=P_0P=[1\ 0\ 0]\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

同样，他第一次使用 X 后，第三次选择 X、Y、Z 的概率向量为 P_2。

$$P_2=P_1P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & \frac{3}{15} & \frac{8}{15}\end{bmatrix}$$

由这个关系，进一步可得

$$P_2=P_1P=(P_0P)P=P_0P^2$$

即

$$P_2=[1\ 0\ 0]\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^2=[1\ 0\ 0]\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & \frac{3}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{32}{150} & \frac{39}{150} & \frac{79}{150}\\ \frac{4}{18} & \frac{3}{18} & \frac{11}{18}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & \frac{3}{15} & \frac{8}{15}\end{bmatrix}$$

一般，可以由概率向量的前一项得到每一个概率向量（绝对分布）

$$P_n=P_{n-1}P$$

或者直接由初始分布得到绝对分布

$$P_n=P_0P^n$$

1.2 固定概率向量与 Марков 长变程

考察 A、B、C 三个商场，一个顾客在光顾了其中一个商场之后，将再到该商场或到别的商场去购货的概率由下面的转移矩阵给出

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

若此人第一次光顾商场 A，考察他以后多次光顾中，分别到商场 A、B、C 的概率。

他一次光顾商场 A，初始分布为 $P_0=[1\ 0\ 0]$ 相继的绝对分布为

$$P_1=P_0P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix},\qquad P_3=P_2P=\begin{bmatrix}\frac{7}{27} & \frac{11}{27} & \frac{9}{27}\end{bmatrix},$$

$$P_2=P_1P=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9}\end{bmatrix},\qquad P_4=P_3P=\begin{bmatrix}\frac{47}{162} & \frac{46}{162} & \frac{69}{162}\end{bmatrix},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

研究这个向量序列的发展趋势。由初始分布，n 步转移矩阵可得绝对分布，即

$$P_n=P_0P^n$$

由

$$P^2=\begin{pmatrix}\frac{8}{18} & \frac{4}{18} & \frac{6}{18}\\ \frac{3}{18} & \frac{9}{18} & \frac{6}{18}\\ \frac{3}{18} & \frac{4}{18} & \frac{11}{18}\end{pmatrix}$$

得

$$P_2=P_0P^2=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9}\end{bmatrix}$$

继而

$$P^4=(P^2)^2=\frac{1}{324}\begin{bmatrix}91 & 92 & 138\\ 69 & 117 & 138\\ 69 & 92 & 163\end{bmatrix}$$

所以

$$P_4=P_0P^4=\begin{bmatrix}\frac{47}{162} & \frac{46}{162} & \frac{69}{162}\end{bmatrix}$$

又

$$P^8=(P^4)^2=\frac{1}{104976}\begin{bmatrix}24706 & 32108 & 48162\\ 24081 & 32733 & 48162\\ 24081 & 32108 & 48787\end{bmatrix}$$

所以

$$P_8=P_0P^8=\frac{1}{104976}\begin{bmatrix}24706 & 32108 & 48162\end{bmatrix}$$

改变初始分布，若由 $P_0=[0\ 1\ 0]$ 出发，可得

$$P_8=\frac{1}{104976}\begin{bmatrix}24081 & 32733 & 48162\end{bmatrix}$$

同样若由 $P_0=[0\ 0\ 1]$ 出发，可得

$$P_8=\frac{1}{104976}\begin{bmatrix}24081 & 32108 & 48787\end{bmatrix}$$

比较由不同初始分布得出 P_8 的三组值，趋向同一个概率向量。

若这些向量序列趋向于某个极限向量，则在一定的时间之后，由一个状态向下一个状态的转移向量的改变应该是很小的。这个特殊的性质，启示我们考虑某个概率向量在经历了上面那样的转移之后保持不变将需要具备什么条件？因而希望求得$\overline{P}$，使得 $\overline{P}=\overline{P}P$。Марков 长变程性质决定了满足这个关系的概率向量，称为固定概率向量。

由 $\overline{P}=\overline{P}P$ 得 $\overline{P}P-\overline{P}=0$

即 $\overline{P}(P-I)=0$，其中 I 为单位矩阵。

方程 $\overline{P}(P-I)=0$ 是齐次的，因而不能有唯一的非平凡解，然而由于概率向量

$$\overline{P}=(\overline{P}_1\ \overline{P}_2\ \cdots\ \overline{P}_N)$$

的分量和必定为1，即

$$\sum_{i=1}^{N}P=1$$

从而解可以唯一确定。

例如对于上面讨论的问题有

$$\overline{P}=[\overline{P}_1\ \overline{P}_2\ \overline{P}_3] \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{3}\overline{P}_i=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3=1$$

由 $\overline{P}(P-I)=0$

即

$$[\overline{P}_1\ \overline{P}_2\ \overline{P}_3]\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = [0\quad 0\quad 0]$$

得

$$[\overline{P}_1\ \overline{P}_2\ \overline{P}_3]\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = [0\quad 0\quad 0]$$

即

$$\begin{cases} \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = 1 \\ -\frac{2}{3}\overline{P}_1 + \frac{1}{2}\overline{P}_2 = 0 \\ \frac{2}{3}\overline{P}_1 - \overline{P}_2 + \frac{1}{3}\overline{P}_3 = 0 \\ \frac{1}{2}\overline{P}_2 - \frac{1}{3}\overline{P}_3 = 0 \end{cases}$$

解方程组得固定概率向量

$$\overline{P} = [\overline{P}_1\ \overline{P}_2\ \overline{P}_3] = \left[\frac{3}{13}\quad \frac{4}{13}\quad \frac{6}{13}\right]$$

注意到上面所得的 P_8 显然是趋于 $\overline{P}$ 的。

固定概率向量 P 的计算不依靠初始分布，这样，在 Марков 过程的长变程中，不论初始分布如何，当它发生足够多次的转移后，概率向量将趋于一个唯一固定的概率向量。这在实研应用中是具有重要意义的。在所讨论问题中的顾客第一次光顾 A、B、C 中哪一个商场，或各以多大概率首次光顾商场 A、B、C 都是无关紧要的（即与初始分布无关），而以后若干次光顾中，他将以概率$\frac{3}{13}$去商场 A，以概率$\frac{4}{13}$去商场 B，以概率$\frac{6}{13}$去商场 C。

2 Марков 划规在商品经济预测中的应用

首先解决在商品经济问题中确定 Марков 规划的转移矩阵。

某商场记录了日用品 Y 的销售状况。用 A 表示“畅销”，B 表示“滞销”，观察三年（$n=36$ 个月）的记录情况（见表 1）。

表 1

月 次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
销售情况	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*A*	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*
月 次	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
销售情况	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*A*	*A*

其中 $n_1=21$个月为 A，$n_2=15$个月为 B，若继续畅销表示为 $A\to A$，由畅销转入滞销表示为 $A\to B$，由滞销转入畅销表示为 $B\to A$，连续滞销表示为 $B\to B$，在求状态 $A\to A$、$A\to B$的移频率时，转分母应为总数 n_1 中减1，因为第36个月是畅销状态 A，而无后继状态，这样得到了表2。

表 2

$A\to A$的频数$\mu_{11}=10$	转移频率 $\frac{\mu_{11}}{n_1-1}=\frac{1}{2}$
$A\to B$的频数$\mu_{12}=10$	转移频率 $\frac{\mu_{12}}{n_1-1}=\frac{1}{2}$
$B\to A$的频数$\mu_{21}=10$	转移频率 $\frac{\mu_{21}}{n_2}=\frac{2}{3}$
$B\to B$的频数$\mu_{22}=5$	转移频率 $\frac{\mu_{22}}{n_2}=\frac{1}{3}$

由概率论中的大数定律有频率稳定于概率的结论，所以立即得到销售状态的转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

接着研究顾客在商场购货的转移矩阵，一个市场调查小组，调查了一位顾客近一年多来在三个商场 A、B、C 购货的情况（该顾客一周去一次商场，每次只在 A、B、C 中之一购货），共记录了他58周的购货情况(见表3)。

表 3

周 次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
商 场	*A*	*A*	*B*	*A*	*B*	*C*	*C*	*C*	*B*	*A*	*A*	*B*	*C*	*C*	*B*	*A*	*B*	*C*	*C*	*B*
周 次	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
商 场	*A*	*B*	*C*	*C*	*C*	*C*	*B*	*C*	*C*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*C*	*C*	*C*	
周 次	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	
商 场	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*C*	*C*	*C*	*B*	*A*	*A*	*B*	*C*	*C*	*C*	*B*	*C*	*C*	*C*	

其中 $n=58$次，$n_1=15$次在 A 购货，$n_2=18$次在 B 购货，$n_3=25$次在 C 购货。
进一步作出统计（见表4）。
其中求转移频率时，将在 C 购货的次数n_3-1作为分母，这是因为第58周状态是 C，无后继状态。

由此可得该顾客在三个商场购货的转移矩阵

表 4

状态转移	转移频数	转移频率	转移概率
$A \to A$	$\mu_{11} = 15$	$\mu_{11}/n_1 = 1/3$	$P_{11} = 1/3$
$A \to B$	$\mu_{12} = 10$	$\mu_{12}/n_1 = 2/3$	$P_{12} = 2/3$
$A \to C$	$\mu_{13} = 0$	$\mu_{13}/n_1 = 0$	$P_{13} = 0$
$B \to A$	$\mu_{21} = 9$	$\mu_{21}/n_2 = 1/2$	$P_{21} = 1/2$
$B \to B$	$\mu_{22} = 0$	$\mu_{22}/n_2 = 0$	$P_{22} = 0$
$B \to C$	$\mu_{23} = 9$	$\mu_{23}/n_2 = 1/2$	$P_{23} = 1/2$
$C \to A$	$\mu_{31} = 0$	$\mu_{31}/n_3 - 1 = 0$	$P_{31} = 0$
$C \to B$	$\mu_{32} = 8$	$\mu_{32}/n_3 - 1 = 1/3$	$P_{32} = 1/3$
$C \to C$	$\mu_{33} = 16$	$\mu_{33}/n_3 - 1 = 2/3$	$P_{33} = 2/3$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

再研究目前市场的占有分布及顾客流动的转移矩阵。在抽样调查了全市顾客中，对上述日用品三种牌子 X、Y、Z 各占的比率为：购买 X 的占 $\frac{1}{3}$，购买 Y 的占 $\frac{1}{3}$，购买 Z 的占 $\frac{1}{3}$。这样就得到了初始分布 $P_0 = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right]$ 或者称为目前市场的占有分布。

对顾客的调查结果是：上月购买 X，本月再买 X 的为 0，各有 $\frac{1}{2}$ 转买 Y 及 Z，上月购买 Y，本月有 $\frac{1}{5}$ 转买 X，$\frac{2}{5}$ 仍买 Y，$\frac{2}{5}$ 转买 Z；上月购买 Z，本月有 $\frac{1}{3}$ 转买 X，转买 Y 的为 0，仍买 Z 的占 $\frac{2}{3}$。这些数据实际上是顾客流动的转移频率，根据大数定律，便得到顾客流动的转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

在经济问题中研究 Марков 决策规划的转移矩阵：

$$P = [P_{ij}]_{N \times N}$$

当状态转移时，都伴随着一定的利润转移，若明确地赋与一定的利润，则称为有利润的 Марков 决策规划。由状态 i 经一步转移至状态 j 时，获得利润 r_{ij}（元）$i, j = 1, 2 \cdots N$ 则由这些 r_{ij} 构成的矩阵，称为利润矩阵，记为

$$R = [r_{ij}]_{N \times N}$$

若 $r_{ij} > 0$ 为盈利，$r_{ij} < 0$ 为亏蚀，$r_{ij} = 0$ 为不盈不亏。

随着时间的推移，状态不断地转移，从而可得到序贯的利润。由于状态转移是随机的，

因此利润是随机变量，它的概率关系由Марков规划概率关系确定。譬如，进一步研究1的情况，考察Y的销售状况，若现在处于销售状态 i $(i=1,2)$，$V_i(n)$为Y处于状态 i，经过 n 步转移之后的期望利润，则有递推公式

$$V_i(n)=\sum_{j=1}^{2}P_{ij}[r_{ij}+V_j(n-1)]\quad i=1,2$$

当 $n=0$ 时，规定边界条件 $V_i(0)=0$ 可得

$$V_i(1)=\sum_{j=1}^{2}P_{ij}r_{ij}=q_i\qquad i=1,2$$

称 $V_i(1)=q_i$ $i=1,2$ 为由1经一步转移后的期望利润，或称为即时期望利润。

若商场核算了Y由销售状态 i 转移到 j 所获得的利润 r_{ij} $i,j=1,2$。若连续畅销可获利2000元，由畅销到滞销或由滞销到畅誉均获利1000元，连续滞销则亏损100元。即利益矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}2000 & 1000\\ 1000 & -100\end{bmatrix}$$

则由前面已得出的销售状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

可得即时期望利润

$$q_1=2000\times\frac{1}{2}+1000\times\frac{1}{2}=1500$$

$$q_2=1000\times\frac{2}{3}+-100\times\frac{1}{3}=633.4$$

结果表明，当本月处于畅销时，下一个月可以获期望利润1500元；当本月滞销时，下一个月可获期望利润633.4元。

为了掌握市场情况，进行市场占有率的预测是十分重要的，前面的调查表明了三个商场占有顾客的初始分布为 $P_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，及顾客在三个商场流动的转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

比如考察四个月后的市场占有率的预测值，为此，首先计算转移矩阵 P 的4步转移矩阵

$$P^4=\frac{1}{324}\begin{pmatrix}94 & 92 & 138\\ 69 & 117 & 138\\ 69 & 92 & 163\end{pmatrix}$$

由初始分布 P_0 与4步转移矩阵可得四个月后市场占有分布 P_4。即

$$P_4=P_0P^4=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{94}{324} & \frac{92}{324} & \frac{138}{324}\\ \frac{69}{324} & \frac{117}{324} & \frac{138}{324}\\ \frac{69}{324} & \frac{92}{324} & \frac{163}{324}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{232}{972} & \frac{301}{972} & \frac{439}{972}\end{bmatrix}$$

进而可考察 n 个月以后市场占有率的预测值

$$P_n=P_0P^n=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^n$$

若顾客的流动情况是稳定的，则经过长期之后的市场占有率将是

$$\overline{P}=P_0\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13}\\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13}\\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13}\end{bmatrix}$$

其中 $\overline{P}$ 实际上就是固定概率向量。由于转移矩阵是遍历的，正则的，它具有唯一固定的概率向量，且与初始分布 P_0 无关，从而，由

$$\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3=1$$

及前面的调查数据，可以研究商场关于某种日用品 X、Y、Z 三种牌子的长期市场占有率预测值，由前面的论述得

$$\overline{P}(P-I)=0$$

即

$$\begin{bmatrix}\overline{P}_1 & \overline{P}_2 & \overline{P}_3\end{bmatrix}\left(\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得方程组

$$\begin{cases} \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = 0 \\ -\overline{P}_1 + \frac{1}{5}\overline{P}_2 + \frac{1}{3}\overline{P}_3 = 0 \\ \frac{1}{2}\overline{P}_1 - \frac{3}{5}\overline{P}_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\overline{P}_1 + \frac{2}{5}\overline{P}_2 - \frac{1}{3}\overline{P}_3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\overline{P} = [\overline{P}_1 \quad \overline{P}_2 \quad \overline{P}_3] \begin{bmatrix} \frac{6}{26} & \frac{5}{26} & \frac{15}{26} \end{bmatrix}$$

给出了 X 长期可占有 $\frac{6}{26}$ 的市场，Y 长期可占有 $\frac{5}{26}$ 的市场，Z 长期可占有 $\frac{15}{26}$ 的市场（注意在这情况下是与初始分布 P_0 无关的）。

上面研究了市场占有率预测的方法，在实际中，决策者更关心的是利润的预测，因而再继续研究。由前面的结果：某商场关于商品 Y 的销售情况的转移矩阵 P 与利润矩阵 R。因而由即时期望利润 $q_1 = 1500$元，$q_2 = 633.4$元，来预测该商场三个月后的期望利润。由 n 步以后的期望利润公式

$$V_i(n) = \sum_{j=1}^{2} P_{ij}[\Gamma_{ij} + V_j(n-1)] \quad i = 1,2$$

（其中 $V_i(1) = q_i \quad i = 1,2$）

可得

$$V_1(2) = \sum_{j=1}^{2} P_{1j}[\Gamma_{1j} + q_j]$$

$$= \frac{1}{2} \times (2000 + 1500) + \frac{1}{2} \times (1000 + 633.4)$$

$$= 1750 + 816.7 = 2566.7 \text{（元）}$$

$$V_2(2) = \sum_{j=1}^{2} P_{2j}[\Gamma_{2j} + q_j]$$

$$= \frac{2}{3} \times (1000 + 1500) + \frac{1}{3} \times (-100 + 633.4)$$

$$= 1666.7 + 177.8 = 1844.5 \text{（元）}$$

进一步得到

$$V_1(3) = \sum_{j=1}^{2} P_{1j}[\Gamma_{1j} + V_j(2)]$$

$$= \frac{1}{2} \times (2000 + 2566.7) + \frac{1}{2} \times (1000 + 1844.5)$$

$$= 2283.4 + 1422.3 = 3705.7 \text{（元）}$$

$$V_2(3) = \sum_{j=1}^{2} P_{2j}[\Gamma_{2j} + V_j(2)]$$

$$= \frac{2}{3} \times (1000 + 2566.7) + \frac{1}{3}(-100 + 1844.5)$$

$$= 2377.8 + 581.5 = 2959.3 \text{（元）}$$

结果说明：当本月处于畅销时，预计三个月后可获得期望利润3705.7元；当本月处于滞销时，预计三个月以后可以获得期望利润2959.3元。

这就完成了所研究的用 Марков 决策规划对商品经济发展预测的理论及方法。

参 考 文 献

〔1〕董泽清，马尔科夫决策规划，中国科学院应用数学研究所印，1982年

〔2〕Bharucha-Reid A.T.，马尔科夫过程理论及应用，上海科学技术出版社，1979年

〔3〕假谷太一，预测知识，科学技术文献出版社重庆分社，1985年

〔4〕杨春巍，F 有限折扣模型的策略迭代法，重庆建筑工程学院学报，1988年2期

〔5〕杨春巍，马尔科夫决策规划对经济发展的最优决策，重庆建筑工程学院学报，1988年4期

（编辑：姚国安）

A PREDICTION OF THE DEVELOPMENT OF COMMODITY ECONOMY BY MEANS OF MARKOVIAN DECISION PROGRAMMING

Yang Chunwei

ABSTRACT This paper studies the transition probability, transfer matrix, distribution of owning the marketplace, and the transition probapility of the flow of customers by means of the theory of Markovian Decision Programming. It gives the theory and method for scientific prediction of the main probability of owning the marketplace and expected revenue in commodity economy.

KEW WORDS the transition probability, transfer matrix, distribution of owning the marketplace, Markovian decision program, commodity economy