重庆建筑工程学院学报
第11卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.11 No.1
1989年3月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING March 1998

编写网络状态方程的代入综合法

何 荣 祖

摘要 本文从分析影响建立网络状态方程的因素入手，根据网络元件的特性，论证了元件在充当树支、连支时的合理排列次序，按照这个次序作出的树，最有利于导出状态方程，是最佳树。本文还列举算例，根据选出的最佳树，写出拓扑方程，并和元件特性方程进行代入综合运算，很容易地消去不需要的变量，获得状态方程的标准型。与其他方法比较，代入综合法的运算过程简捷，工作量大大减少，兼有直接法和拓扑法的优点。

关键词 网络分析 状态方程 代入综合法 拓扑方程 最佳树

前 言

状态变量分析，是电路的基本内容之一，其主要点是编写状态方程。对于线性时不变网络，编写状态方程的方法很多，但常见的不外乎是直接法（即直观法），拓扑法（即系统法）以及把储能元件移出网络后的无储能和动态网络的混合矩阵法[1,2]。其中以拓扑法较为理想，大体步骤是：

1）选树，选状态变量；

2）列写基本割集方程、基本回路方程和元件特性方程，即

$$Q_f I_b = 0, \qquad B_f V_b = 0 \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} I_t \\ V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_{fl} \\ -B_{ft} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_t \\ I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Q_{fl} \\ Q'_{fl} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_t \\ I_l \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$YV = I \tag{3}$$

3）进行消除非状态变量的运算，然后整理得状态方程的标准型：

$$\dot{X} = AX + Be \tag{4}$$

在完成式（4）的过程中，通常需要作矩阵运算，工作量之多，手续之繁，有时令人吃

本文1987年11月7日收到。

惊。能否找到一种运算过程简捷、工作量少又有规律可循的方法？笔者认为欲达此目的应当解决以下两个基本问题：

一是选什么元件、按照什么方式组合成的树对导出式（4）最为有利，即选为树支的元件最优的排列次序是什么；二是怎样使导出式（4）的全过程运算最为简捷，工作量最少，并且有一定的规律性可遵循。

1 选树时元件的最优排列

从拓扑的观点出发，由式（2）知道：

（1） $v_l = f(v_t)$ （2 a）

意即以树支电压来表达连支电压，树支电压为表达量；

（2） $i_t = f(i_l)$ （2 b）

意即以连支电流来表达树支电流，连支电流为表达量。

又由式（4）知道：

$$y = f(x,\ e) \qquad (4\,a)$$

意即以状态变量x和输入变量e来表达非状态变量y，x、e为表达量。

表1

树支元件	e C G $\underline{\text{L}}$ $\underline{\text{j}}$
连支元件	j L R $\underline{\text{C}}$ $\underline{\text{e}}$

把（2 a）、（2 b）及（4 a）诸式作为选树时元件优先排序的基本依据，以衡量选什么元件充当树支或连支并进行优先次序排列。事实上对于不含受控源的线性网络，文献[1][2][3][4][5][6]已作了如表一所示的合理排序：

表1的含义是：一个树的树支由全部独立电压源e、尽可能多的电容C和必要的电导G组成。在网络存在退化情况时，还可能含有被迫充当树支的电感$\underline{\text{L}}$和独立电流源$\underline{\text{j}}$。余树的连支，按对偶关系排序。

如果网络含有受控源（包括理想变压器、回转器）及零器等元件，以及存在开路、短路等支路时，选树时各网络元件的合理排序与表一不相同。下面进行必要的讨论。

1.1 受控源 $\hat{e}$、$\hat{j}$

受控源不同于独立源，它属于双口元件，有两条支路（控制支路和受控支路），两者之一原则上可以单独充当树支或连支，但控制支路究竟是树支或连支，要看它是什么元件而定。受控支路可作为树支的考虑对象，例如受控电压源$\hat{e}$，其受控支路的特性为

$$v_{\hat{e}} = \mu v \qquad (\text{或}\quad v_{\hat{e}} = \gamma i)$$

可以认为是 $v = \dfrac{1}{\mu} v_{\hat{e}}$ （或 $i = \dfrac{1}{\gamma} v_{\hat{e}}$）

这样就表明了$v_{\hat{e}}$是一个表达量，用来表达v或i的，如果选受控支路为树支，$v_{\hat{e}}$自然是树支电压，作为v或i的表达量是符合选树的基本依据的。电流$i_{\hat{e}}$是树支电流，是个任意值的未知量，未知量用作表达量依理不合。可见，受控电压源$\hat{e}$只宜充当树支，不宜充当连支（除非网络存在退化情况）。

由对偶关系，受控电流源 $\hat{j}$ 只宜充当连支（除非网络存在退化情况）。

元件 e 和 $\hat{e}$ 既然都可以充当树支，其优先排列次序可由e、$\hat{e}$回路（如图1）审定。e的电压v_e为已知量，与网络无关，而$\hat{e}$的电压$v_{\hat{e}}$则为受控量，与网络有关，在回路中只有$v_{\hat{e}}$取值于v_e，相反的情况不存在。所以e应优先于$\hat{e}$选为树支，排列在$\hat{e}$之前。

仿此理，元件e和c的优先排序是e优先于c，排列在c之前。

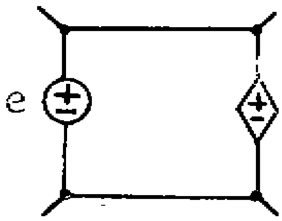

图 1

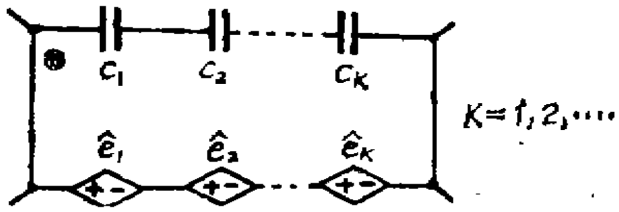

图 2

至于$\hat{e}$与 c 的优先排序问题，可由图2审定。若$\hat{e}_k$全部选为树支，必然有一个电容c_i被迫为非独立元件，其电压v_{c_i}不能作为状态变量,非状态变量作为表达量不符合选树的依据，所以c_i只能充当连支，结果导致网络降阶。若c_k全部选为树支，必然有一个 $\hat{e}_i$成为连支，结果未导致网络降阶。这就存在两种选树排序方案：第一种是$\hat{e}$优先于c从而导致网络降阶的方案，由式（2b）写出的树支电容基本割集方程将含有连支电容的电流，对消除非状态变量有利；第二种是 c 优先于$\hat{e}$而未导致网络降阶的方案，由式（2b）写出的基本割集方程将含有非独立的树支电容电流，在消除非状态变量时工作量较多。

可见，一般含有e、$\hat{e}$、c回路的网络，宜使网络降阶，采用第一种排序方案。

当网络含有理想变压器、回转器的场合，可用相应受控源等效代换，再行选树。

1.2 短路支路d、开路支路k

一般说来，只有当受控源的控制量是取自开路支路k或短路支路d时，才能把它们看成是一个元件（见例1），这时d和k的特性是

$$\begin{cases} v_d = 0 \\ i_d = \text{任意值} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_k = \text{任意值} \\ i_k = 0 \end{cases}$$

可以认为d是独立电压源在$v_e = 0$时的特例，而k则是独立电流源在$i_j = 0$时的特例。从而选d为树支，排列在e之后；选k为连支，排列在j之后。

1.3 零器（Nullor）

H.J.Carlin定义的零器是零口器（Nu）和非口器（No），两者都属于二端元件，但成对地出现在网络中，不能单独地存在[6,8]。Nu和No的特性分别是

$$\begin{cases} v_{Nu} = 0 \\ i_{Nu} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} v_{No} = \text{任意值} \\ i_{No} = \text{任意值} \end{cases}$$

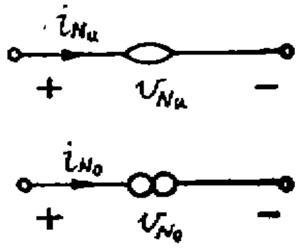

图 3

v_{Nu}和i_{Nu}都是已知量，而v_{No}和i_{No}都是未知量，不论四者中任何一个充当表达量，都不构成对被表达量的约束关系，故选为树支或连支时机会均等。唯有当v_{No}、i_{No}是网络中受控源的控制量时（见例2），情况才有所不同，例如作为受控源$\hat{e}$的控制量时，因有

$$v_{\hat{e}}=\mu v_{N_o} \quad 或 v_{\hat{e}}=\gamma i_{N_o}$$

故 No 可看成是受控电压源$\hat{e}$（vvs或cvs），在处理其充当树支时，排在$\hat{e}$之后比较合理。综观上述，网络元件在充当树支或连支时的优先排列次序，可重新安排如表2。

表2

树支元件	e	d	$\hat{e}$(C)	C($\hat{e}$)	No	Nu	G	$\underline{L}$	$\underline{\hat{j}}$	$\underline{k}$	$\underline{j}$
连支元件	j	k	$\hat{j}$(L)	L($\hat{j}$)	No	Nu	R	$\underline{C}$	$\underline{\hat{e}}$	$\underline{d}$	e

按照表2排序，可由计算机进行选树，其框图如图4（具体程序省略）。

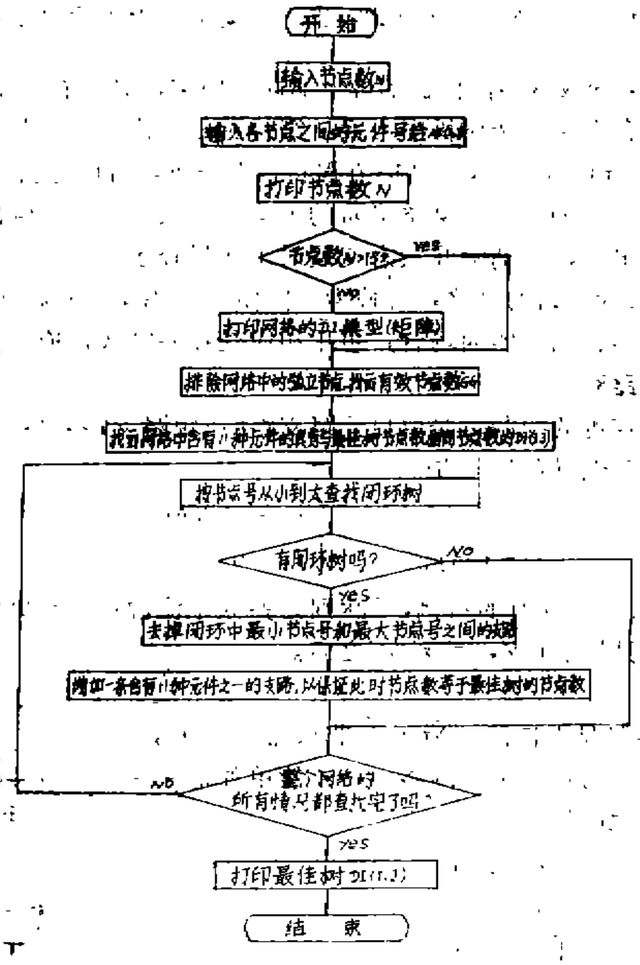

图 4

2 状态方程的编写

先把诸网络元件按其对形成状态方程的作用进行分类。

由选树的基本依据知道，由树支电容C所定义的基本割集方程和由连支电感L所定义的基本回路方程是形成状态方程式（4）的基础；而由电导G所定义的割集方程和由电阻R所定义的回路方程，则有助于消除非状态变量；对于由电压源e所定义的割集方程和由电流源所定义的回路方程，因它们无法与本身的特性方程作代入综合，故对式（4）的形成没有直接的影响。所以，从有利于式（4）的形成来看，元件C、L及G、R都属于应该列写特性方程和拓扑方程的基本元件。为讨论方便，C、L谓“主要元件”，而G、R谓“次要元件”，对于元件e及j可不予以理会[7]。

非状态变量的消除，在代入综合运算中自然得以实现，不必另作运算。

图5方框图是表明编写状态方程式（4）的全部过程。

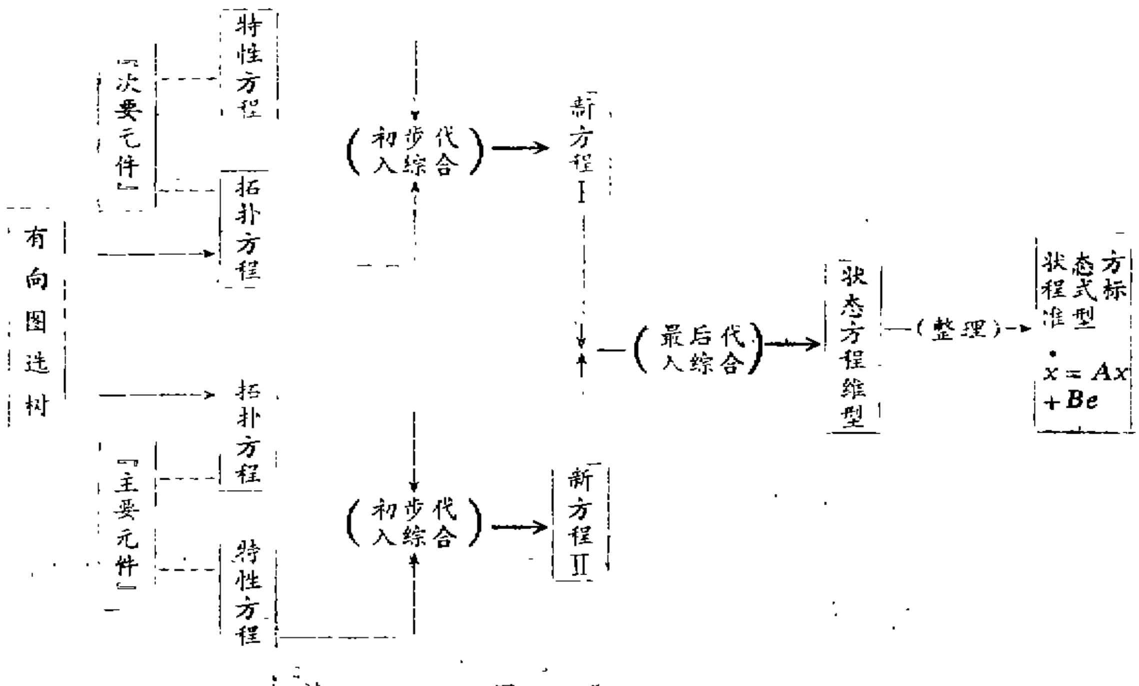

图 5

3 算例

例1 图6（a）所示的是含有开路支路k_7、短路支路d_{11}和理想变压器的网络。理想变压器可用受控源等效代换，如图6（c），电流i_{d11}不是受控源的控制量，故支路d_{11}可以不是一个元件，在列方程时不予以考虑。

（1）按表2排序选树如图6（b）。“主要元件”：C_2、L_8、L_{10}；“次要元件”：R_6、$\hat{j}_7$、$\hat{j}_8$；状态变量：v_2、i_8、i_{10}。

（2）列拓扑方程、特性方程，并进行初步代入综合。

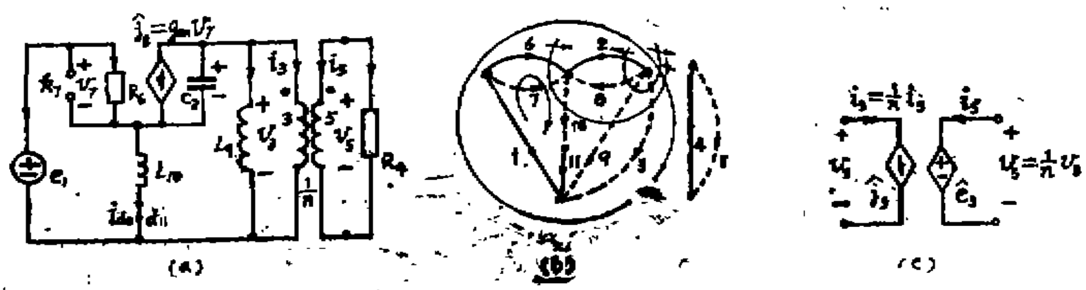

图　6

$$
\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll}
R_6: \ v_6 = v_7 = R_6 i_6 = R_6(i_9 + i_{10} + i_3) & i_t = f(i_l) \\
\hat{j}_3: \ i_3 = \dfrac{1}{n} i_5 = \dfrac{v_3}{n^2 R_4} = \dfrac{1}{n^2 R_4}\ (v_2 - v_6 + v_{e1}) & v_t = f(v_T) \\
\hat{j}_8: \ i_8 = g_m v_7 = g_m v_6 & \text{特性方程}
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{II}\left\{\begin{array}{ll}
C_2: \ c_2 \dot{v}_2 = i^2 = -i_6 + (-i_8) + i_3 & i_t = f(i_l) \\
L_9: \ L_9 \dot{i}_9 = v_9 = v_3 & \text{特性方程} \\
L_{10}: \ L_{10} \dot{i}_{10} = v_{10} = -v_6 + v_{e1} & v_l = f(v_t)
\end{array}\right.
$$

方程组中v_6为非状态变量，由方程组Ⅰ的第一式可得

$$v_6 = \frac{1}{n^2 K + 1}\ (v_2 + n^2 R_4 i_9 + n^2 R_4 i_{10} + a_{e1})$$

其中 $K = \dfrac{R_4}{R_6}$。

（3）综合Ⅰ、Ⅱ两组方程，并将v_6代入，整理得

$$
\begin{pmatrix} \dot{v}_2 \\ \dot{i}_9 \\ \dot{i}_{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2 K + 1}
\begin{pmatrix}
-C_2^{-1}\left(g_m + R_6^{-1}\right) & -C_2^{-1} n^2 R_4\left(g_m + R_6^{-1}\right) & C_2^{-1}\left(1 - n^2 R_4 g_m\right) \\
L_9^{-1} n^2 K & -L_9^{-1} n^2 R_4 & -L_9^{-1} n^2 R_4 \\
-L_{10}^{-1} & -L_{10}^{-1} n^2 R_4 & -L_{10}^{-1} n^2 R_4
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} v_2 \\ i_9 \\ i_{10} \end{pmatrix} + \frac{1}{n^2 K + 1}
\begin{pmatrix}
-C_2^{-1}\left(g_m + R_6^{-1}\right) \\
-L_9^{-1} n^2 K \\
L_{10}^{-1} n^2 K
\end{pmatrix} [v_{e1}]
$$

结果与参考文献[1]§4.5示例相符合。如果按照该文献所列的矩阵求法，过程就相当繁，比较之下，采用代入综合方法运算，过程就简捷得多。

例2 图7所示的是含受控源和零器的网络，图中d_5的电流i_5是$\hat{e}_3$的控制量，故d_5视为“元件”，而k_{10}的电压v_{10}不作为受控源的控制量，故不能视为元件。

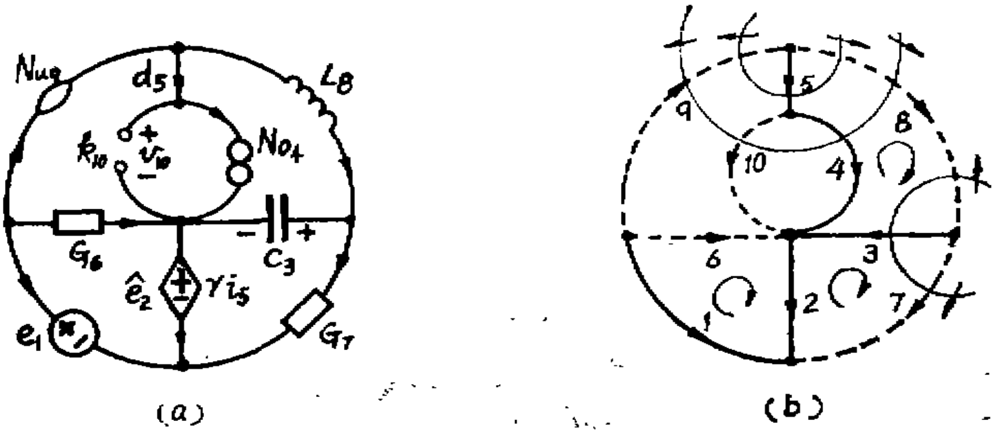

图 7

（1）选树如图7（b）。"主要元件"：C_3，L_8；"次要元件"：G_6，G_7，N_{o9}，N_{o4}，$\hat{e}_2$；状态变量：v_3，i_8。

（2）列写拓扑方程和特性方程，进行初步代入综合得：

$$
\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll}
\hat{e}_2: & v_2=\gamma i_4=\gamma i_5=-\gamma(i_8-i_9)=-\gamma i_8 \\
No_4: & i_4=i_5=i_9-i_8-i_{10}=0-i_8-0=-i_8 \\
G_6: & i_6=G_6 v_6=G_6(v_1-v_2)=G_6 v_1+\gamma G_6 i_8 \\
G_7: & i_7=G_7 v_7=G_7(v_2+v_3)=-G_7\gamma i_8+G_7 v_3 \\
No_9: & v_9=v_1-v_2-v_4-v_5=0
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{II}\left\{\begin{array}{ll}
C_3: & C_3\dot{v}_3=i_3=i_8-i_7 \\
L_8: & L_8\dot{i}_8=v_8=-v_3+v_4+v_5=v_1-v_2-v_3
\end{array}\right.
$$

最后代入综合Ⅰ、Ⅱ两组方程得状态方式雏型：

$$
\left\{\begin{array}{l}
C_3\dot{v}_3=-G_7 v_3+(1+G_7\gamma) \\
L_8\dot{i}_8=v_1+\gamma i_8-v_3
\end{array}\right.
$$

整理得：

$$
\begin{pmatrix}\dot{v}_3 \\ \dot{i}_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C_3^{-1} & Q_7 C_3^{-1}(1+G_7\gamma) \\ -L_8^{-1} & L_8^{-1}\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_3 \\ i_8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 \\ L_8^{-1}\end{pmatrix}[v_{e1}]
$$

选N_{o9}为树支N_{o4}为连支，运算结果不变。

4 结论

从上面讨论可以看出，代入综合法在形成线性时不变网络的状态方程时，具有下面几个特点：（1）立论于两个克希荷夫定律（KCL、KVL）和元件特性方程，以有向图的基本割集及基本回路为依据，列写网络的拓扑方程和元件特性方程，因而是基本的方法；（2）按照表2所列的元件排序选树，对形成状态方程是最佳的排序形式，所选出的树是既利于运算又

利于CAD；（3）所要用的方程仅是与选树有关的基本元件C、L、G、R方程，其数目较其他方法少，而且消除非状态变量在代入综合过程中自然实现，所以运算过程简单快捷，工作量最少。

由于作者水平有限，理解不深，故文中难免存在缺点乃至错误，敬请批评指正。

参 考 文 献

〔1〕 N.Balabanian and T.A.Bickart, "Electrical Network Theory", Chap.4, New York, John Wiley Son, 1969

〔2〕 E.S.Kuh, S.A.Desor, L.O.Chua, "Linear and Nonlinear Circuits", Chap.12, Uniuersity of California Berkeley, 1984.（未公开出版）

〔3〕 江泽佳编，"网络分析的状态变量法"，第四章，人民教育出版社，1979

〔4〕 周昌著，沈志广译，"电路理论——机助分析方法，"第六、九章，人民邮电出版社，1984

〔5〕 W.K.Chen, "Linear Network and Systems", Chap.11, California, Wadsworth, Inc, 1983

〔6〕 V.K.Atre, "Network Theory and Filter Design", Chap.10, New-Delhi, Wiley Eastern Limited, 1980

〔7〕 Xian-Rong Wang, "The Two-Step Method of Dynamic Nonlinear Network", 武汉电工理论学会通讯，第一期，1983

〔8〕 何荣祖，"线性网络的零器节点分析法"，重庆建筑工程学院学报，第4期，1987

THE INSERTING SYNTHETICAL METHOD FOR COMPILING NETWORK STATE EQUATION

He Rongzu

ABSTRACT This paper begins with the analysis of factors affecting the establishmet of network state equations. On the basis of characteristics of network element, a rational formntation order of elements as twigs and links is proved. According to the order, a best tree can be drawn, which is helpful to formulate state equations. Two examples are enumerated. On the basis of the best tree, topological equations of network are written. By inserting operations with both topological equations and characteristic formulas, a standard state equation is derived as a result of eliminating the undesired variables. This method is simpler and more convenient as compared with the others in the and has advantage of both the topological method and the direct operations, method.

KEY WORDS state equation, network analysis, inserting synthetical method, topological equation, a best tree