

粘结积图的优美性

彭太华 周玉琴

摘要 本文在优美三角阵和交错块概念的基础上,又提出了几个新的概念,并研究了几种粘结积图的优美性。即当 $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是一个可粘图集, $F = K_1, \dots, K_{m-1}$ 时, $F(Y)$ 可为一个优美图; 当 $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是一个和图图集, F 是满足一定条件的优美图时, $F(Y)$ 可为一个优美图; 当 $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是一个愉快图集, F 是一个满足一定条件的优美图集时, $F(Y)$ 可为一个优美图。

关键词 优美偶图对, 优美对图, 粘结积图, 愉快图集

前言

文[3]引入了优美三角阵, 交错块等新概念。本文以上述两概念为工具和基础, 进一步引入了一些新概念和工具, 集中地研究了粘结图的优美性。

本文所用术语除本文新引入的和文[3]中引入的之外, 均为常用术语。

1 各种偶图对与对图

1.1 偶合偶图对与偶合对图

对优美偶图 $G = (X, Y, E)$ 及其优美标定 l , 我们规定在 l 之下的基点 $v(l_0 = 1)$ 在集 X 当中。

对具有 n_1 个顶点的优美偶图 $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$, 其优美标定为 l_1 , 其在 l_1 之下的优美矩阵为 A_1 。对 A_1 , 将各点 $v \in Y$ 所对应的行中的各元素1均改为零, 从而得到矩阵 \bar{B}_1 , 称 \bar{B}_1 为 G_1 的“Y空矩阵”(见图1)。

对具有 n_2 个点的优美偶图 $G_2 = (X_2, Y_2, E_2)$, 其优美标定为 l_2 , 其在 l_2 之下的优美矩阵为 A_2 。对 A_2 , 将各点 $v \in X_2$ 所对应的列中的元素1均各改写为零, 从而得到矩阵 \underline{B}_2 , 称 \underline{B}_2 为 G_2 的“X空矩阵”(见图1)。

移动 \underline{B}_2 , 使叠到 \bar{B}_1 之上, 要求两者主对角线 ab 与 $\bar{a}^T \bar{b}^T$ 所在的直线重合, 在重合部分

各位置集上元之值为 $\overline{B_1}$ 中相应位置上元 a 与 $\overline{B_2}$ 中相应位置上元 β 。这样就得到如图 1 中 M 所含的阴影部份所限定的一个矩阵 $H_{s,t}$ 。

如果矩阵 $H_{s,t}$ 中, 除 $a'ab'$ 线所在的位置集为缺位置集外, 其它均为优美位置集, 亦即如果 $H_{s,t}$ 是一个仅含一个缺位位置集的缺位交错块, 那么就称优美偶图 G_1 与 G_2 构成了一个“偶合偶图对 (G_1, G_2) ”, 并称 $H_{s,t}$ 所对应的偶图 W 为 (G_1, G_2) 所对应的一个“偶合对图”。

偶合对图 W 在缺位交错块 $H_{s,t}$ 之下有一个标定 l , 它满足:

对 G_1 中的点 v , 有

$$\begin{aligned} l(v) &= l_1(v) & v \in X_1, \\ l(v) &= l_2(v) + n_2 & v \in Y_1 \end{aligned}$$

对 G_2 中的点 v , 有

$$\begin{aligned} l(v) &= l_2(v) + s & v \in X_2 \\ l(v) &= l_2(v) + s - n_2 & v \in Y_2 \end{aligned}$$

在偶合对图 w 中有 $X(w) = X_1 \cup Y_2, Y(w) = X_2 \cup Y_1$, 即有 $w = G(X_1 \cup Y_2, X_2 \cup Y_1, E)$

为说明这个定义, 我们举例如下:

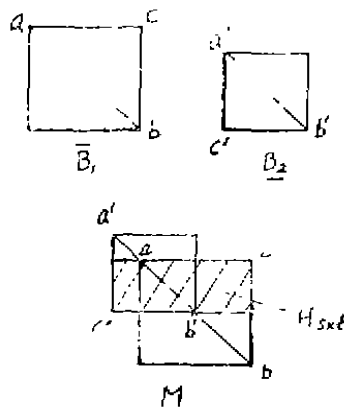


图 1

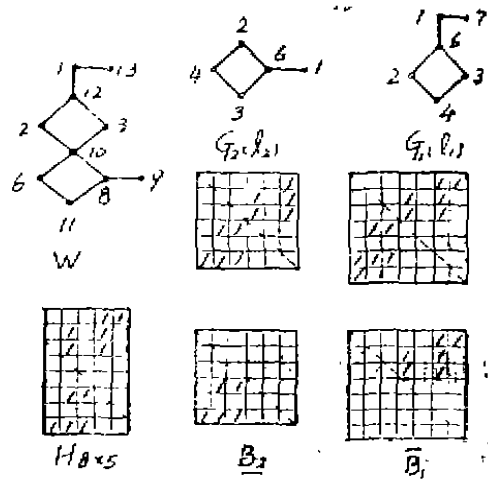


图 2

例 1: 在图 2 中, 优美偶图 $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$ 及 $G_2 = (X_2, Y_2, E_2)$ 以及其优美标定 l_1 与 l_2 如图中所示。其有

$$\begin{aligned} \{l_1(v), v \in X_1\} &= \{1, 2, 3\} \\ \{l_1(v), v \in Y_1\} &= \{4, 5, 6, 7\} \\ \{l_2(v), v \in X_2\} &= \{1, 2, 3\} \\ \{l_2(v), v \in Y_2\} &= \{4, 5, 6\} \end{aligned}$$

其所对应的优美矩阵为 A_1 及 A_2 。 G_1 对应的 Y 空矩阵为 $\overline{B_1}$, G_2 对应的 Y 空矩阵为 $\underline{B_2}$; 由 $\overline{B_1}$ 与 $\underline{B_2}$ 叠成的缺位交错块为 $H_{s,t}$ 决定的偶合对图为 W 。 W 是一个偶图。 在 $H_{s,t}$ 之下, 它有标定 l 在 l 之下, 有

$$X(w) = \{v_i \mid l(v) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = X_1 \cup Y_2$$

$$Y(w) = \{v_i \mid l(v) = 8, 9, 10, 11, 12, 13\} = X_2 \cup Y_1$$

易知，若在 $H_{6,6}$ 的缺位位置集中任一位置处添加一个1，则其就变成了一个交错块。这时，相应地意味着在 W 中的一个相应点对之间连上一条边，使 W 变成一个交错偶图。同时，标定 l 就变成了某对应的交错值。

1.2 匹配偶图对与匹配对图

对优美偶图 $G = (X, Y, E)$ ，再在其中增加一个顶点子集 Z ，它包含且只包含 G 中的全部孤立点。这样一来， G 又可表为 $G = (X, Y, Z, E)$ 。

对一个偶合偶图对 (G_1, G_2) ， w 为其偶合对图， H_{n_1, n_2} 是 w 对应的缺位交错块。现设 $G_1 = (X_1, Y_1, Z_1, E_1)$ 及 $G_2 = (X_2, Y_2, Z_2, E_2)$ ，又设 l_1 与 l_2 分别为 G_1 与 G_2 的优美标定。如果更有：

(1) 对 $\forall u \in X_1, v \in Y_2$ ，均有 $l_1(u) = l_2(v) + s - n_2$

(2) 对 $\forall u \in Y_1, v \in X_2$ ，均有 $l_1(u) + n_1 \pm l_2(v) + s$

就称 (G_1, G_2) 是一个“匹配偶图对”， w 为 (G_1, G_2) 所成的“匹配对图”。

很容易看出，上面的两个条件其实是保持 G_1 与 G_2 是 w 的两个不相交子图的。这一点又可举例说明。

例2 在图3中，优美偶图 $G_1 = (X_1, Y_1, Z_1, E_1)$ 及 $G_2 = (X_2, Y_2, Z_2, E_2)$ 以及其优美标定如图中所示。 G_1 对应的 Y 空矩阵 B_1 与 G_2 对应的 X 空矩阵 B_2 亦图中所示。

B_1 与 B_2 叠合成缺位交错块 $H_{6,6}$ 。 W 是 $H_{6,6}$ 所对应的匹配对图， G_1 与 G_2 是它的两个不交子图。

我们还可以指出一点，当 G_1 与 G_2 都是树时，匹配偶图对 (G_1, G_2) 就是文[1]中所定义的匹配对 (matched-pair)。

1.3 优美偶图对与优美对图

对一个匹配偶图对 (G_1, G_2) ，设 n_1 与 n_2 分别为 G_1 与 G_2 的顶点数， W 为其匹配对图。如果更有 $n_1 = n_2 = n$ ，那么我们就更称 (G_1, G_2) 是一个“优美偶图对”，并称 W 是 (G_1, G_2) 对应的“优美对图”。

易见，这时 W 对应的缺位交错块 $H_{n,n}$ 所缺位置集是 $R(1,1)$ ，它所对应的标定 l 应满足，对 G_1 中的点 v ，有

$$l(v) = l_1(v) \quad v \in X_1$$

$$l(v) = l_1(v) + n \quad v \in Y_1$$

对 G_2 中的点 v ，有

$$l(v) = l_2(v) \quad v \in X_2$$

$$l(v) = l_2(v) \quad v \in Y_2$$

现在，我们亦可举例说明这件事。

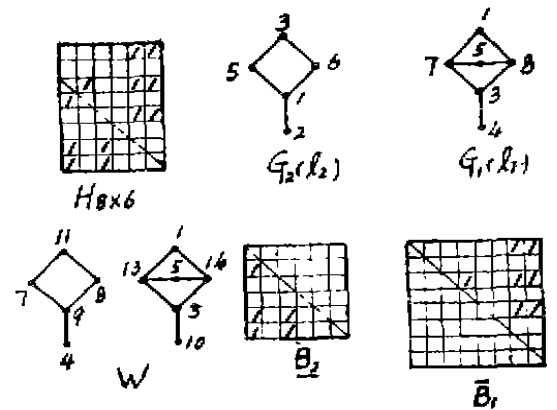


图 3

例3 在图4中, (G_1, G_2) 就是一个优美偶图对, 其优美对图 w 及 W 对应的缺位交错块为有缺位位置集 $R(1,1)$ 的缺位优美方阵 $H_{8,8}$ 。这些均如图中所示。

显然, 当 G_1 与 G_2 均为树时, 这里的优美偶图对 (G_1, G_2) 就是文[1]中所定义的优美树 (beau-pair)。

2 各种图集及其粘结优美性

2.1 粘结积图

令 F 是一个具 m 个顶点 $f_i, 1 \leq i \leq m$, 的标定图, Y 是由 t 个偶合对图 $W_j = (G_{j1}, G_{j2}), 1 \leq j \leq t, 0 \leq t \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, 及 $m - 2t$ 个图 G_i 所成之集。 $Y = \{G_1, G_1$

$\dots, G_m\}$ 中各图之间以及它们与 F 之间都互不相交。从每一个 G_i 中各选出一个点 v_i , 使 v_i 与 $f_i, 1 \leq i \leq m$, 分别合并成一点, 便得到一个图 $F(Y)$, 我们称其是 F 与 Y 的“粘结积图”。

本文的主要目的就是探索 F 与 Y 需要满足一个什么样的条件, 才能使 $F(Y)$ 成一个优美图? 下面分述之。

2.2 可粘图集及其优美性

对图集 $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$, 若其中有 $t, 1 \leq t \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 个偶合对图, 其余的 $m - 2t$ 个图 G_i 中, 主要有一个是一般优美图之外, 均为交错偶图, 则 Y 是一个“可粘图集”。

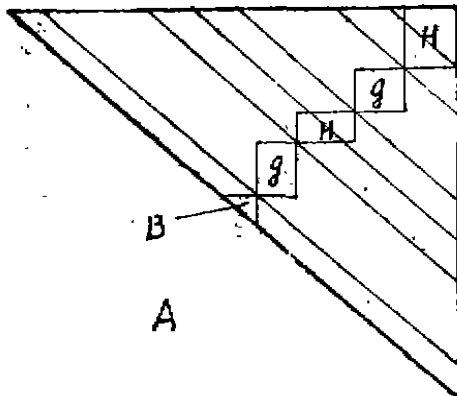


图 5

下面试举例说明这一点。

例4: 图6中所载图集 Y 由一个偶合对图 W_1 , 一个匹配对图 W_2 , 及一个优美图 (其实是一个交错偶图) G 构成, 即 $Y = \{W_1, W_2, G\}$ 。 W_1 对应的缺位交错块为 H_1 , W_2 对应的缺位交错块为 H_2 , G 对应的优美三角阵为 A 。粘结基图 F 我们取为星 $K_{1,4}$ 。 $F(Y)$ 及对应的优美

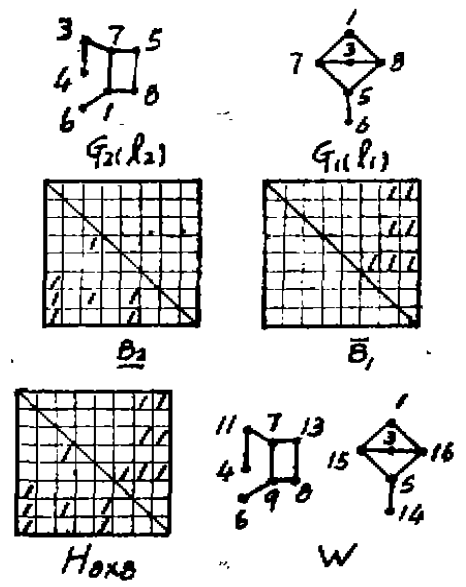


图 4

这里, 我们称 Y 是可粘图集的理由是这样的: 设各偶合对图 W_i 对应的缺位交错块为 H_i , 各交错偶图 G_i 对应的交错块为 g_i , 一般优美图 (若有的话) 对应的优美三角阵为 B , 那么这些 H_i, g_i, B 就可如图5中所示的那样, 从右上到左下依次排成一个具有 $m - 1$ 个缺位位置集的缺位优美三角阵 A 。此时, 若有一个具 m 个点 $m - 1$ 条边的图 F , 其点在某个标号 l 之下, 使其所含的 $m - 1$ 条边所对应的 l 恰好填满上述各缺位位置集, 则 A 就变成了一个优美三角阵, 同时这亦意味着 F 和 Y 中各图“粘成”一个优美图 $F(Y)$, 而 A 就是其对应的优美三角阵。

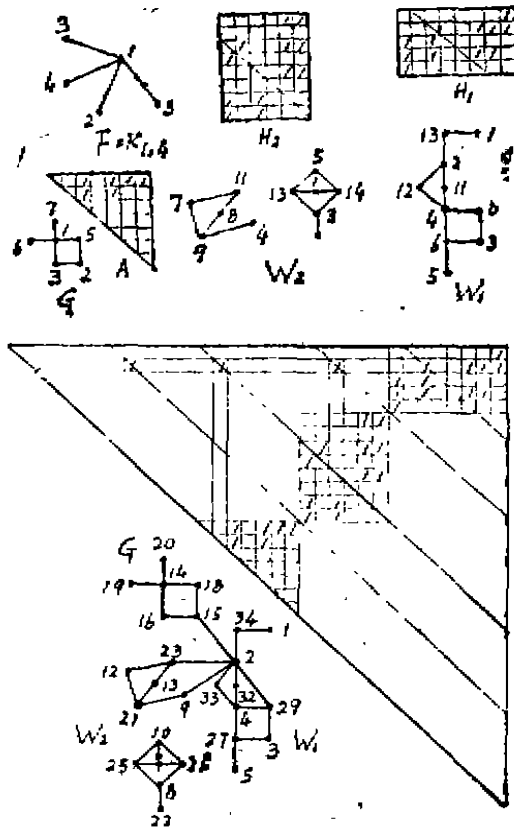


图 6

三角阵如图 6 示。

从例 4 很容易得出这样一个结论

定理 1 $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是一个可粘图集, $F = K_{1, m-1}$ 是一个星图, 则 F 和 Y 一起可粘成一个大型的优美图。

2.3 合谐图集及其优美性

$Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是一个可粘图集, 如果

$(G_i, G_{m-i}), 1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, 都是优美偶图树,

那么我们就特别地称呼 Y 是一个“合谐图集”。

这里, 称呼 Y 是合谐图集的理由是: 由于各图对 $(G_i, G_{m-i}), 1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, 都是优美偶图

对, 因而其对应的都是优美对图 W_i , 而各 W_i 对应的又都是具缺位位置集 $R(1,1)$ 的正方形缺位交错块。于是构成的 $m-1$ 缺位位置集的缺位优美三角阵中所具有的这 $m-1$ 个缺位位置集之间的间隔就更有规律性了。这样, 图集 Y 的粘结性, 不用说就更优越一些了。

这里就研究这一点。

对正整数 $n, 1 \leq i \leq m$, 则

$$N(0) = 0, N(i) = \sum_{j=1}^i n_{m+1-j}, \quad 1 \leq i \leq m$$

对合谐图集 $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$, 设 G_i 有 n_i 个顶点, 且设 l_i 为其优美标定, 则图 7 示所三角阵 A , 就对应一个标定 l , 其满足

$$l(v) = l_i(v) + N(i-1), \quad v \in X_i$$

$$l(v) = l_i(v) + N(m-i), \quad v \in Y_i$$

其中 X_i 与 Y_i 分别为 G_i 的两个内。当 $m = 2k + 1$ (奇数) 时, 对 G_{k+1} 特别地有

$$l(v) = l_{k+1}(v) + N(k)$$

这时, 正如图 7 中所示, 各 G_i 中所含的边所对应的 1 恰好填满图中, 除所示的那 $m-1$ 个缺位位置集之外的所有位置集。这而 $m-1$ 个缺位位置集中若各添上一个 1 使成优美三角阵, 那么这 $m-1$ 个 1 所对应的边 e , 在 l 之下的标号数必分别满足

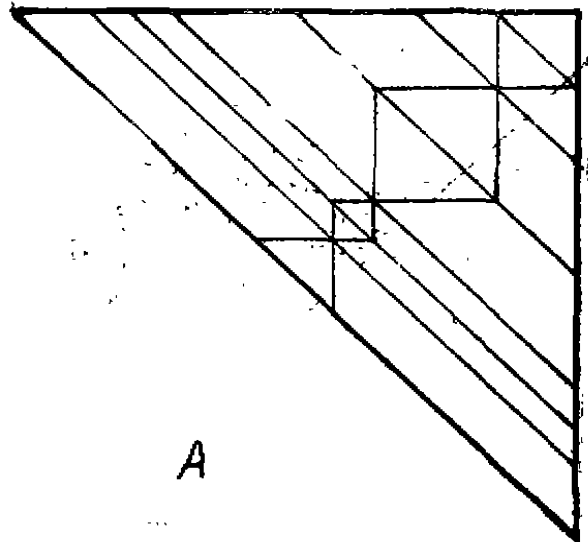


图 7

$$\Omega_i = \begin{cases} N(k+1 + \lfloor \frac{1}{2}i \rfloor) N(k - \lfloor \frac{1}{2}(i-1) \rfloor) & m = 2k \text{ 时} \\ N(k+1 + \frac{1}{2}(i-1)) - N(k - \lfloor \frac{1}{2}i \rfloor) & m = 2k+1 \text{ 时} \end{cases}$$

这 $m-1$ 边生成之图记为 F , 则就有优美图 $F(Y)$ 。这件事的一个特殊情况就表述在下面的定理 2 中。

定理 2 $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是一个合谐图集, l 是其决定的缺位优美三角阵 A 对应的标定。 F 是一个含 m 个点 $t_i, 1 \leq i \leq m, m-1$ 条边的图, 若有其标号 φ 使

(1) F 中之边在 φ 之下取尽各数 $\Omega_i, 1 \leq i \leq m$;

(2) 对每一个 j , 都存在 G_j 中一点 U_j , 使存 $l(U_j) = \varphi(t_j)$ 则在使 U_j 与 $t_j (1 \leq j \leq m)$ 分别重合成一点的条件之下, $F(Y)$ 是一个优美图。



图 8

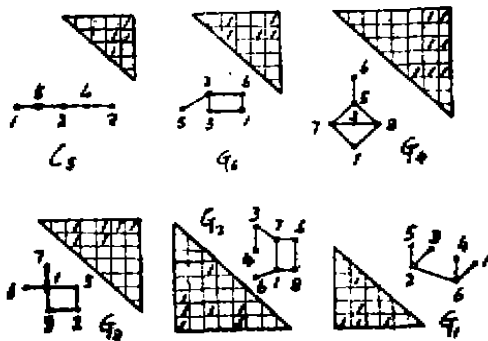


图 9

而这里恰好有一个图——具有 m 个点的链——恰好就具有这个性质。这也就是说, 具有 m 个点的链可以把 Y 中的 m 个图 G_i 串接起来, 成一个较大的优美图。其串接的形式是这样的。

令 C_m 是一个具有 m 个点 $C_i, 1 \leq i \leq m$ 的链, 其标定 φ^* 如图 8 中所示: (即有 $\varphi^*(C_i) = i$)。若给 C_m 一个新标号 φ , 使

$$\varphi(v) = r + N(\varphi^*(v) - 1) \quad v \in V(C_m)$$

则 C_m 中各边在 φ 之下的标号就恰好取尽 $\Omega_i, 1 \leq i \leq m$ 。这就是:

推论 1 令 C_m 如上所定, $1 \leq r \leq \min \{n_i, 1 \leq i \leq m\}$ 。对每一个 i , 再令 G_i 之满足 $l_{i-1} = r + N_{i-1}$ 的点 x_i 为粘结点。则合谐图集 $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 则令 $x_i = C_i, 1 \leq i \leq m$, 时 $C_m(Y)$ 是一个优美图。

为说明这个定理, 我们举例如下:

例 5: 图 9 中, $Y = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$ 是一个合谐图集。其中 $(G_5, G_1), (G_2, G_2)$ 各为优美偶图对, G_3 是一个交错偶图。 C_5 是一条含 5 个顶点的链。其下面的大图 $C_5(Y)$ 就是它们粘结而成的优美图。旁边的大型优美三角阵 A , 就是 $C_5(Y)$ 所对应的优美三角阵。(这里取 $r = 6$)

推论 2 在推论 1 中, 若图集 Y 中各图都是树, 则 $C_m(Y)$ 亦必为优美树。

推论 3 在定理 2 中, 若 Y 中各图, 以及 F

均为树, 则 $F(Y)$ 亦为优美树。

容易看出, 这里的推论 2 及推论 3 就是文 [1] 中的推论 5 及定理 5。

2.4 愉快图集及其优美性

$Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是一个台谱图集, 若各 G_i 所具有的顶点数 (或说具有的边数) 均彼此相等。则称 Y 是一个“愉快图集”。

这里, 特称 Y 是愉快图集的理由是: 由于各 G_i 具有的顶点数都是彼此相等的, 不妨设其为 n , 于是知各优美偶图对 (G_i, G_{m-i}) $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, 对应的都是仅具一个缺位位置集

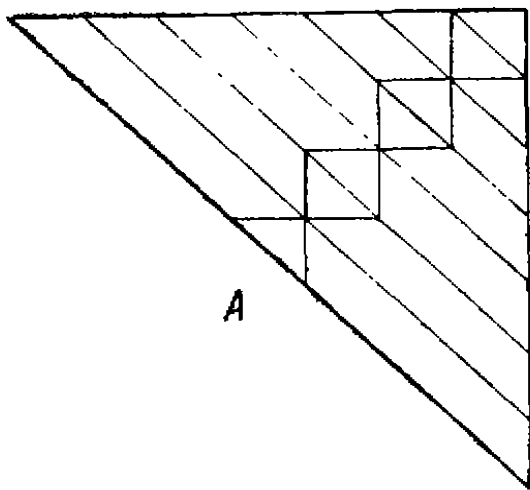


图 10

$R(1,1)$ 的缺位优美 n 阶方阵, 从而由这些缺位优美 n 阶方阵构成的具 $m-1$ 个缺位位置集的缺位优美三角阵 A (见图 10) 中, 各缺位位置集相互之间的间隔都是一致的。这样一来, 可作图集 Y 的粘结基图的图类就更广了。

定理 3 $Y = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_m\}$ 是一个愉快图集, 其中各 G_i 分别有优美标定 l_i , 且其点数均为 n 。又设 F 是一个具 m 个点 t_i , $1 \leq i \leq m$, 的优美图, φ 为其优美标定。则当取标定 l , 使

$$(1) \quad l(v)_1 = l_i(v) + (i-1)n \quad v \in X_i$$

$$l(v) = l_i(v) + (m-i)n, \quad v \in Y_i$$

(2) 当 $m = 2k+1$ (奇数) 时, 对 G_{k+1} 中的点 v , 有

$$l(v) = l_{k+1}(v) + k_n \quad v \in V(G_{k+1})$$

(3) 对 F 中的点 t_i , 有

$$l(t_i) = n \cdot \varphi(t_{i-1}) + r$$

(规定 $\varphi(t_0) = 0, 1 \leq i \leq m$)

时, l 是图 $F(Y)$ 的一个优美标定。

这时, 各 G_i 上的粘结点均为满足 $l(v_i) = r$ 的点 v_i 。

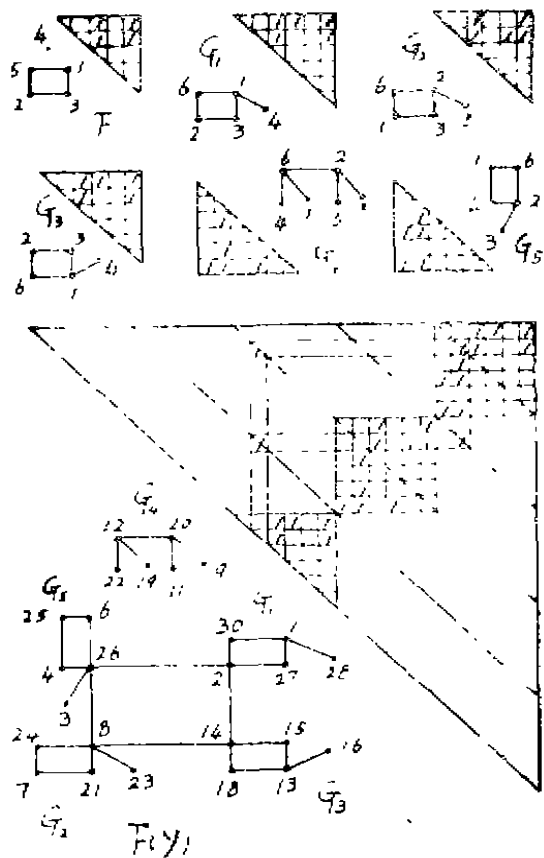


图 11

这个定理就是称图集 Y 为愉快图集的原因。

为说明这个定理，举例如下：

例6 在图11中， $Y = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$ 是一个愉快图集，其中 (G_1, G_5) ， (G_2, G_4) 均为优美图对，易见， $F(Y)$ 是一个优美图，其对应的优美三角阵亦如图示。

推论4 在定理3中，若 Y 中各图均为树， F 亦为树，则 $F(Y)$ 是一个优美树。

显然，这个推论与文[1]中定理2是一致的。

2.5 讨论

(a) 在推论4中，取 $Y = \{G_1, G_2\}$ ，其中 G_1 与 G_2 是一对同构的优美树，又取 $F = K_{1,1}$ ，则 $G(Y)$ 当然亦是一个优美树。而这个结果就是文[2]中的定理2。对文[2]中的推论1，当然亦可照此办理。

(b) 在推论1中，取 $Y = \{G_1, G_2\}$ ，其中 G_1 与 G_2 是一对同构的优美树，又取具有两点路 C_2 ，则 $C_2(Y)$ 亦为一个优美树。这就是文[2]中的定理4。对文[2]中的推论4.3亦可照此办理。

参 考 文 献

- [1] K. M. Koh, D. G. Rogers and T. Tan., "Products of Graceful Trees", *Discrete Mathematics*, 279-292, 31(1980)
- [2] 蒲怀仓, 李学智: "关于对称一些树的优美问题", 《西北师范学院学报》(自然科学版), 8-13, 4(1985)

(编辑: 姚国安)

GRACEFULITY OF COHERENCE-PRODUCT GRAPH

Peng Taihua

Zhou Yuqin

ABSTRACT On the basis of the concepts of graceful-triangle matrix and interlaced block, this paper presents several new concepts and studies the gracefulality of several coherent-product graphs. When $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ is a coherent-collection of graph and $F = K_{1, m-1}$, $F(Y)$ may construct a graceful graph, when $Y = G_1, G_2, \dots, G_m$ is a harmonious collection of graphs and F is a graceful graph which satisfies some conditions, $F(Y)$ may construct a graceful graph; when $Y = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ is a happy collection of graphs and F is a graceful graph which satisfies some conditions, $F(Y)$ may construct a graceful graph.

KEY WORDS graceful bigraph-pair, graceful pair-graph coherent-product graph, happy collection of graphs