重庆建筑工程学院学报
第11卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.11 No. 4
1989年 12月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Dec. 1989

高次变节点 Serendipity 等参单元的形函数通用公式

张建辉　　汪礼顺

（河北大学）　　（重庆建筑工程学院）

摘　要　本文将文[2]中的联合法，推广到一般的高次变节点 Serendipity 等参单元，较详细地推导出了此类单元的形函数通用公式。该公式运用于 Serendipity 等参过渡元的优越性尤其显著。

关键词　联合法，过渡单元，形函数

概　述

在工程中，常要遇到力场非均匀的问题，用有限元法解决此类问题时，需要考虑单元或节点的疏密过渡。实现这种过渡的单元即为一种过渡单元，其节点的分布将可能是非对称均匀的。这种过渡元和高次 Serendipity 单元的形函数确定，均不能直接应用文[1]中的覆盖方法。为了不失一般性，本文将 Serendipity 等参（过渡）单元边上的节点视为可变动的（即无论节点的数目和位置都是可调整的），导出了变节点 Serendipity 等参单元的形函数通用公式。

1　平面 Serendipity 等参单元

如图1示局部坐标系及四边形单元。设单元12、23、34、41边的节点数（包括该边上的角节点）分别为 m、n、t、q，单元节点的局部坐标分别记为：

12边：$(\alpha_1, -1)$，$(\alpha_2, -1)$，…，$(\alpha_{m-1}, -1)$，$(\alpha_m, -1)$

23边：$(1, \beta_1)$，$(1, \beta_2)$，…，$(1, \beta_{n-1})$，$(1, \beta_n)$

34边：$(\gamma_1, 1)$，$(\gamma_2, 1)$，…，$(\gamma_{t-1}, 1)$，$(\gamma_t, 1)$

41边：$(-1, \lambda_1)$，$(-1, \lambda_2)$，…，$(-1, \lambda_{q-1})$，$(-1, \lambda_q)$

本文约定节点编号沿边界按逆时针方向排列。且 $\alpha_1=\beta_1=\gamma_t=\lambda_q=-1$、$\alpha_m=\beta_n=\gamma_1=\lambda_1$

本文1988年7月20日收到。

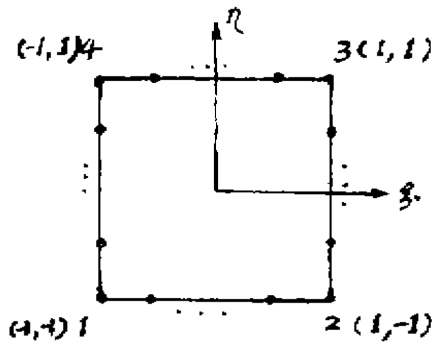

图 1

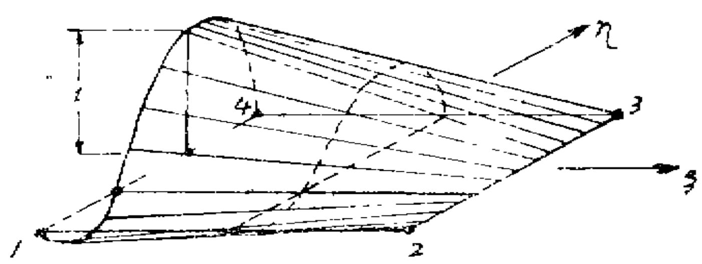

图 2

=1，对应节点为角节点。

对41边上第 i 个节点($z \leqslant i \leqslant q-1$)，由文[1]中的覆盖方法，得到对应的边界覆盖线为：

$$1-\xi=0, \qquad 1-\eta=0, \qquad 1+\eta=0 \tag{1}$$

当41边第 i 节点发生单位位移而其它节点位移为零时，考虑单元形成的位移场，记为 $P_{41,i}$。根据C^0连续条件，该位移场在上述覆盖线上取零值，且沿ξ方向线性变化。如图 2 示（不妨设 $q=4$）。

沿41边进行拉格朗日插值，得41边上各点的位移为：

$$L_{41,i}(\eta)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q}\frac{\eta-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \tag{2}$$

由于位移场 $P_{41,i}$ 沿 ξ 方向线性变化，因而：

$$P_{41,i}(\xi,\ \eta)=\frac{1}{2}(1-\xi)L_{41,i}(\eta)$$

$$=\frac{1}{2}(1-\xi)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q}\frac{\eta-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \tag{3}$$

根据单元形函数的定义和性质，得41边第 i 节点的形函数为：

$$N_{41,i}=\frac{1}{2}(1-\xi)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{q}\frac{\eta-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1-\eta^2}{1-\lambda_i^2}\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{q-1}\frac{\eta-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \tag{4}$$

其中，$2\leqslant i\leqslant q-1$。

不难看出，上式中已包括了41边上第 i 节点的三条边界覆盖线方程的左边表达式。根据同样的过程，我们亦可得到单元其它边上诸节点（角节点除外）的形函数：

$$N_{12,i}=\frac{1}{2}(1-\eta)\frac{1-\xi^2}{1-\alpha_i^2}\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{m-1}\frac{\xi-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}, \qquad 2\leqslant i\leqslant m-1, \tag{5}$$

$$N_{23,i}=\frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1-\eta^2}{1-\beta_i^2}\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n-1}\frac{\eta-\beta_j}{\beta_i-\beta_j},\qquad 2\leqslant i\leqslant n-1, \tag{6}$$

$$N_{34,i}=\frac{1}{2}(1+\eta)\frac{1-\xi^2}{1-\gamma_i^2}\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{t-1}\frac{\xi-\gamma_j}{\gamma_i-\gamma_j},\qquad 2\leqslant i\leqslant t-1, \tag{7}$$

对于单元的角节点，例如节点1（图1），有边界覆盖线：$1-\xi=0$，$1-\eta=0$。当角节点1发生单位位移而其它节点位移为零时，单元的位移场可视为与边上节点产生单位位移时所产生的位移场相同的两个场的迭加，并减去一个调整函数。所以，对于角节点1，有：

$$p_1(\xi,\ \eta)=\frac{1}{2}(1-\eta)L_{12,1}(\xi)+\frac{1}{2}L_{41,q}(\eta)-f(\xi,\ \eta) \tag{8}$$

其中$f(\xi,\ \eta)$为调整函数。为了使$p_1(\xi,\ \eta)$满足在节点1取单位值、在其它节点取零值的条件，求得：

$$f(\xi,\ \eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{9}$$

此式即为无边上节点时四边形单元角节点1的形函数。

由（8）式及（9）式，且根据形函数性质，得：

$$\begin{aligned}N_1&=\frac{1}{2}(1-\eta)L_{12,1}(\xi)+\frac{1}{2}L_{41,q}(\eta)-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\\ &=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\left[\frac{2}{1-\xi}L_{12,1}(\xi)+\frac{2}{1-\eta}L_{41,q}(\eta)-1\right]\end{aligned} \tag{10}$$

$$\therefore\qquad N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\left[\frac{2}{1-\xi}\prod_{j=2}^{m}\frac{\xi-\alpha_j}{-1-\alpha_j}+\frac{2}{1-\eta}\prod_{j=1}^{q-1}\frac{\eta-\lambda_j}{-1-\lambda_j}-1\right]$$

$$=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\left[\prod_{j=2}^{m-1}\frac{\xi-\alpha_j}{-1-\alpha_j}+\prod_{j=2}^{q-1}\frac{\eta-\lambda_j}{-1-\lambda_j}-1\right] \tag{11}$$

当12边与41边不存在边上的节点、即$m=q=2$时，可得：

$$L_{12,1}(\xi)=\prod_{j=2}^{m}\frac{\xi-\alpha_j}{-1-\alpha_j}=\frac{\xi-1}{-1-1}=\prod_{j=2}^{m-1}\frac{\xi-\alpha_j}{-1-\alpha_j}\cdot\frac{\xi-1}{-1-1}$$

所以，取：

$$\prod_{j=2}^{m-1}\frac{\xi-\alpha_j}{-1-\alpha_j}=1,\ \text{同样,}\quad \prod_{j=2}^{q-1}\frac{\eta-\lambda_j}{-1-\lambda_j}=1\,.$$

对单元的其它角节点，我们完全类似地推出其形函数为：

$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\left[\prod_{j=2}^{m-1}\frac{\xi-\alpha_j}{1-\alpha_j}+\prod_{j=2}^{n-1}\frac{\eta-\beta_j}{-1-\beta_j}-1\right] \tag{12}$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\left[\prod_{j=2}^{l-1}\frac{\xi-\gamma_j}{1-\gamma_j}+\prod_{j=2}^{n-1}\frac{\eta-\beta_j}{1-\beta_j}-1\right] \tag{13}$$

$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\left[\prod_{j=2}^{l-1}\frac{\xi-\gamma_j}{1-\gamma_j}+\prod_{j=2}^{q-1}\frac{\eta-\lambda_j}{1-\lambda_j}-1\right] \tag{14}$$

当在单元某边界上，例如12边界上仅有角节点即 $m=2$ 时，取：

$$\prod_{j=2}^{m-1}\frac{\xi-\alpha_j}{-1-\alpha_j}=1, \qquad \prod_{j=2}^{m-1}\frac{\xi-\alpha_j}{1-\alpha_j}=1$$

对单元的其它边界亦有同样结论。

式(4)～(7)、(11)～(14)即为所求的形函数通用公式。对 Serendipity 平面等参单元，无论其边上节点如何分布及个数多少，均可由上述公式方便地求得其节点形函数。

用上述公式表示的形函数由两部分组成，其一为对应边界覆盖线方程的左边表达式，其二为在通过所讨论点的边界线上对该边上节点（角节点除外）的拉氏插值函数。在此，我们称后者为对应该节点形函数的单点覆盖函数。

对应于单元节点 i（$1\leqslant i\leqslant M$，M为单元节点总个数），我们把相应的边界覆盖线方程的左边表达式记为 g_{ki}，单点覆盖函数记为$\bar{g}_{k,i}$。则，上述 Serendipity 平面等参单元的形函数通用公式可概括为：

角节点：$N_i=C\prod_{K=1}^{2}g_{Ki}\cdot\left(\sum_{K=1}^{2}\bar{g}_{K,i}-1\right)$ (15)

边节点：$N_i=C\prod_{K=1}^{3}g_{Ki}\cdot\bar{g}_{1,i}$ (16)

其中常数 C 使 N_i 在节点 i 取单位值。

2 空间 Serendipity 等参单元

如图 3 示局部坐标系及一个 Serendipity 空间单元。公式 (15)、(16) 可被推广到这种空间单元上。形函数公式为：

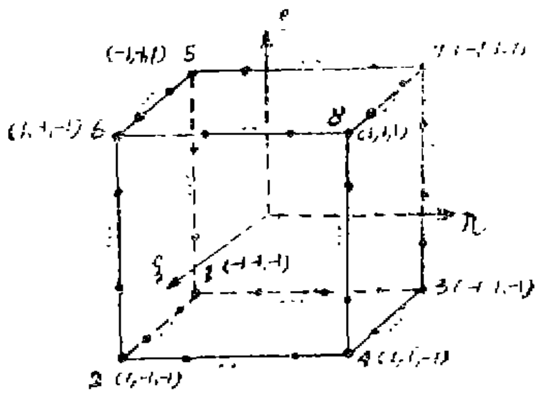

图 3

角节点：

$$N_i=C\prod_{K=1}^{3}g_{Ki}\cdot\left(\sum_{K=1}^{3}\bar{g}_{K,i}-2\right) \tag{17}$$

棱上节点：

$$N_i=C\prod_{K=1}^{4}g_{Ki}\cdot\bar{g}_{1,i} \tag{18}$$

式中符号的意义与(15)、(16)式相同。当单元某棱边上无节点时，则对应此棱边的单点覆盖

函数取值 1 。

3 实 例

3.1 十节点四边形等参过渡元（图4）

边上变动节点的局部节点设为：

5(α_1, −1), 6(α_2, −1), 7(1, β_1), 8(1, β_2), 9(γ, 1), 10(−1, λ)

根据通用公式(4)～(7)、(11)～(14)得：

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\left[\frac{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}+\frac{\eta-\lambda}{-1-\lambda}-1\right]$$

$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\left[\frac{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}+\frac{(\eta-\beta_1)(\eta-\beta_2)}{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}-1\right]$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\left[\frac{\xi-\gamma}{1-\gamma}+\frac{(\eta-\beta_1)(\eta-\beta_2)}{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}-1\right]$$

$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\left[-\frac{\xi-\gamma}{1+\gamma}+\frac{\eta-\lambda}{1-\lambda}-1\right]$$

$$N_5=\frac{1}{2}(1-\eta)\frac{1-\xi^2}{1-\alpha_1^2}\cdot\frac{\xi-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\qquad N_6=\frac{1}{2}(1-\eta)\frac{1-\xi^2}{1-\alpha_2^2}\cdot\frac{\xi-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$$

$$N_7=\frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1-\eta^2}{1-\beta_1^2}\cdot\frac{\eta-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\qquad N_8=\frac{1}{2}(1+\xi)\frac{1-\eta^2}{1-\beta_2^2}\cdot\frac{\eta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}$$

$$N_9=\frac{1}{2}(1+\eta)\frac{1-\xi^2}{1-\gamma^2}\qquad N_{10}=\frac{1}{2}(1-\xi)\frac{1-\eta^2}{1-\lambda^2}$$

3.2 十二节点四边形等参元（图5）

该单元边上节点坐标为：

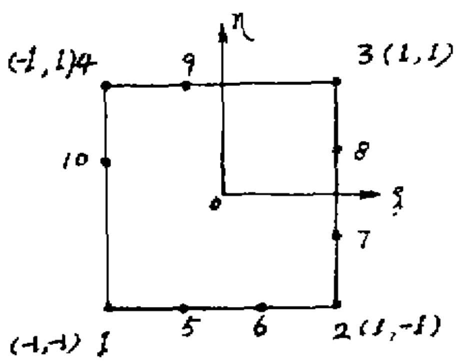

图 4

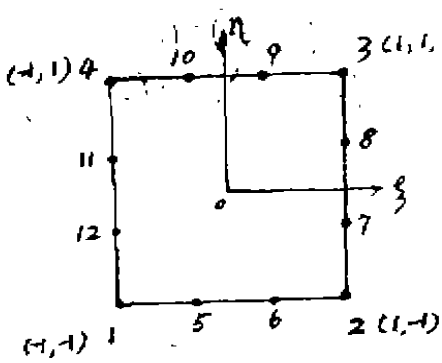

图 5

5(α_1, −1), 6(α_2, −1), 7(1, β_1), 8(1, β_2), 9(γ_1, +1), 10(γ_2, 1), 11(−1, λ_1), 12(−1, λ_2)

由通用公式，立即可写出单元各节点的形函数。如：

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\left[\frac{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)}{(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}+\frac{(\eta-\lambda_1)(\eta-\lambda_2)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}-1\right]$$

$$N_5=\frac{1}{2}(1-\eta)\frac{1-\xi^2}{1-\alpha_1^2}\cdot\frac{\xi-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}$$

当该单元边上节点均分所在边时：$\alpha_1=-\frac{1}{3}$、$\alpha_2=\frac{1}{3}$，$\lambda_1=\frac{1}{3}$、$\lambda_2=-\frac{1}{3}$。所以：

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\left[\frac{\left(\xi+\frac{1}{3}\right)\left(\xi-\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}+\frac{\left(\eta-\frac{1}{3}\right)\left(\eta+\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}-1\right]$$

$$=\frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[9(\xi^2+\eta^2)-10]$$

$$N_5=\frac{1}{2}(1-\eta)\frac{1-\xi^2}{1-\frac{1}{9}}\cdot\frac{\xi-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$=9(1-\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi)/32$$

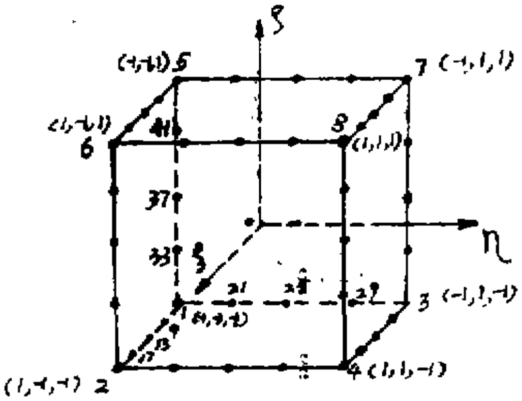

图　6

即用本文通用公式求得的形函数与用其它方法求得的相同。

3.3　四十四节点六面体等参元（图6）

设此单元的节点局部坐标是确定的，且棱上节点均分其所在边。由(17)式：

$$N_1=C(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\left[\frac{\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\xi\left(\xi-\frac{1}{2}\right)}{\left(-1+\frac{1}{2}\right)(-1)\left(-1-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\left(\eta+\frac{1}{2}\right)\eta\left(\eta-\frac{1}{2}\right)}{\left(-1+\frac{1}{2}\right)(-1)\left(-1-\frac{1}{2}\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\zeta\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)}{\left(-1+\frac{1}{2}\right)(-1)\left(-1-\frac{1}{2}\right)}-2\right]$$

$$=C(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\frac{1}{3}\left[-4(\xi^3+\eta^3+\zeta^3)+(\xi+\eta+\zeta)-6\right]$$

因 $N_1(-1,\ -1,\ -1)=1$，可得：$C=\frac{1}{8}$

$$\therefore\ N_1=\frac{1}{24}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)[-4(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+(\xi+\eta+\zeta)-6]$$

由（18）式：

$$N_9=C(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)\frac{(\xi-\overline{0})\left(\xi-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}-0\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= C(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)\xi(2\xi-1)$$

而 $N_8\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)=1$，则：$C=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ N_8=\frac{1}{3}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)\xi(2\xi-1)$$

此单元其它节点的形函数，可同样求得。

4 结束语

上述Serendipity等参单元的形函数通用公式对单元的节点分布（除角节点固定外）未提出任何要求，因此具有较广泛的应用意义。对于四边形、六面体等参过渡元尤其是如此。用等参元解决具体问题时，有时据根需要，须使母单元的局部节点坐标与实际单元的节点分布合理的匹配，处理此问题的方法，见文献[5]，这里不再叙述。

参 考 文 献

[1] 汪礼顺，"等参单元原理及其应用"，重庆建筑工程学院学报，No.4，1982

[2] 汪礼顺，叶树宝，"用联合法求形函数"，重庆建筑工程学院学报，No.1，1987

[3] 汪礼顺，"多节点等参单元形态函数的确定"，1986

[4] 张迪，"二维修改等参元"，计算结构力学及其应用，3卷4期，1986

[5] 张迪，"三维修改等参元"，数值计算与计算机应用，7卷4期，1986

[6] 华东水利学院，弹性力学问题的有限单元法，水利电力出版社，1977

[7] 张建辉"单元形函数通用公式研究和一种二次等参非协调元及其程序"，研究生毕业论文，1988

（编辑，刘家凯）

THE GENERAL FORMULAS OF SHAPE FUNCTIONS FOR THE HIGHER SERENDIPITY ISOPARAMETRIC ELEMENTS WITH VARIABLE NODES

Zhang Jianhui

(Hebei University)

Wang Lishun

(Chongqing Institute of Architecture and Engineering)

ABSTRACT In this paper, the united method for determining shape function is extended to higher Serendipity isoparametric element with variable nodes, and the general formulas of shape functions for the element is obtained. The formulas show great superiority for the Serendipity isoparametic transitional elements.

KEY WORDS united method, transition element, shape function