重庆建筑工程学院学报

第12卷 第2期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.2

1990年 6月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING June 1990

板壳组合结构有限元分析的连结问题

刘龙泉　　　　喻志刚

（建筑工程系）　　（机电系）

摘　要　板壳组合体是工程中常见的一类结构，在进行有限元计算时，经常要考虑它们间的连结问题。本文在文献〔1〕的基础上，导出了板壳组合结构有限元分析的罚单元刚度矩阵，并说明了其适用范围，在工程计算中有一定的实用价值。

关键词　板壳，有限元，罚单元

1　罚单元法的基本原理

设有m个独立变量涉及到未知量$\overline{U}$中的n个（$n \geqslant m$）变量：

$$U = (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}, u_n)^T$$

一般的线性约束方程可写成：

$$BU = C$$

即

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \qquad (1)$$

式中：B与U都与未知量无关，且B是常数矩阵。

有限元位移法的解使总势能取极值。在总势能π外增加一项罚函数π_F，使π_F满足在（1）式成立时，π_F为零，当（1）式误差增大时，π_F也增大。这样新势能$\pi + \pi_F$取极值时，就近似得到了满足（1）的解。

由于结构势能是由单元势能相加得到，所以将惩罚项设计成一种单元势能。

$$\pi_F = \frac{1}{2}(BU - C)^T D(BU - C)$$

式中，$D = D_0 d$；D_0是权矩阵；d是罚因子，d越大，惩罚项越重。

总势能取极值，得有限元方程

$$\frac{\partial(\pi + \pi_F)}{\partial U} = B^T D(BU - C) = K_F U - P_F \qquad (2)$$

本文1989年2月22日收到。

式中：$K_F = B^TDB$，$P_F = B^TDC$

K_F是罚单元刚度矩；P_F 为罚单元的等效节点力。

2 板壳组合结构罚单元刚度阵的推导

我们将罚单元法的原理引入板壳组合结构，将不同板与壳的连结通过一块单元来过渡。把它们间的位移协调性问题看成是一种线性约束。通过罚单元的作用，强行保证连结处的位移协调。

由于八节点四十个自由度壳元素是一种适应性较广的元素，它即可用于处理厚壳和薄壳，也可用来计算厚板和薄板，所以本文板和壳元素都采用此单元。

如图[1]所示结构，表示液压机面板与筒体间的连结。单元①②③采用八节点四十个自由度壳单元，单元④采用八至二十一节点可变节点单元，由此可见，面板与筒体通过实体块单元连结起来。

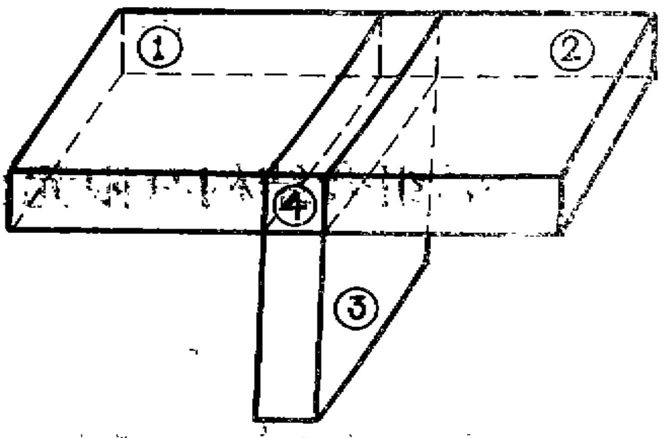

图 1 面板与筒体连结处简图

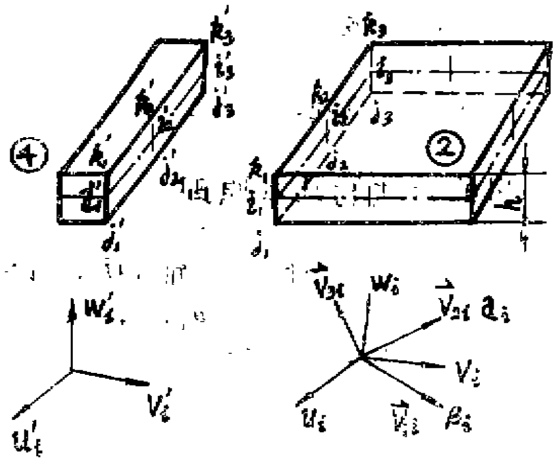

图 2 块单元④与壳单元②的连结简图

如图[2]所示，壳单元位移是在中面上定义的。中面法线矢量和按右手定则定义的其它两个矢量分别为：

$$\vec{V}_3 = (l_3, m_3, n_3)^T$$

$$\vec{V}_1 = (l_1, m_1, n_1)^T$$

$$\vec{V}_2 = (l_2, m_2, n_2)^T$$

中面节点位移为：

$$(u_i, v_i, w_i, \partial_i, \beta_i)^T$$

块单元位移是在节点上定义的。其节点位移为：

$$(u'_i, v'_i, w'_i)^T$$

在结构变形中，为了满足位移协调，交界处节点必须满足下述约束条件：

$$u'_k - \left(u_i + \frac{h}{2} l_{2i} \partial_i - \frac{h}{2} l_{1i} \beta_i\right) = 0$$

$$v'_k - \left(v_i + \frac{h}{2} m_{2i} \partial_i - \frac{h}{2} m_{1i} \beta_i\right) = 0$$

$$w_k' - \left(w_i + \frac{h_i}{2} n_{2i} \partial_i - \frac{h_i}{2} n_{1i} \beta_i\right) = 0$$

$$u_j' - \left(u_i - \frac{h_i}{2} l_{2i} \partial_i + \frac{h_i}{2} l_{1i} \beta_i\right) = 0$$

$$v_j' - \left(v_i - \frac{h_i}{2} m_{2i} \partial_i + \frac{h_i}{2} m_{1i} \beta_i\right) = 0$$

$$w_j' - \left(w_i - \frac{h_i}{2} n_{2i} \partial_i + \frac{h_i}{2} n_{1i} \beta_i\right) = 0$$

$$u_i' - u_i = 0$$

$$v_i' - v_i = 0$$

$$w_i' - w_i = 0$$

即：$[B][\delta_i] = [0]$

式中

$$[B] = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & -\frac{h_i}{2} l_{2i} & \frac{h_i}{2} l_{1i} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -\frac{h_i}{2} m_{2i} & \frac{h_i}{2} m_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -\frac{h_i}{2} n_{2i} & \frac{h_i}{2} n_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & \frac{h_i}{2} l_{2i} & -\frac{h_i}{2} l_{1i} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & \frac{h_i}{2} m_{2i} & -\frac{h_i}{2} m_{1i} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \frac{h_i}{2} n_{2i} & -\frac{h_i}{2} n_{1i} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$[\delta_i] = [u_i, v_i, w_i, \partial_i, \beta_i, u_j', v_j', w_j', u_k', v_k', w_k', u_i', v_i', w_i']^T$$

$$(i = i_1, i_2, i_3;\ j = j_1, j_2, j_3;\ k = k_1, k_2, k_3)$$

将$[B]$代入罚单元刚度矩，并令D_0为单位矩I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}_{14 \times 14}$$

得：

$$
K_I = d\cdot\begin{vmatrix}
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & A_3 & A_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & A_4 & A_{12} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & A_5 & A_{13} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & -A_3 & -A_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & -A_4 & -A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & -A_5 & -A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
$$

式中：

$$A_1=\frac{h_i^2}{2};\quad A_2=\frac{h_i^2}{2}(l_{1i}l_{2i}+m_{1i}m_{2i}+n_{1i}n_{2i})$$

$$A_3=\frac{h_i}{2}l_{1i};\quad A_4=\frac{h_i}{2}m_{1i};\quad A_5=\frac{k_i}{2}n_{1i};\quad A_6=-\frac{h_i}{2}l_{1i};$$

$$A_7=-\frac{h_i}{2}m_{1i};\ A_8=-\frac{h_i}{2}n_{1i};\quad A_{10}=\frac{h_i^2}{2};\quad A_{11}=-\frac{h_i}{2}l_{2i};$$

$$A_9=-\frac{h_i}{2}(l_{1i}l_{2i}+m_{1i}m_{2i}+n_{1i}n_{2i});\ A_{12}=-\frac{h_i}{2}m_{2i}$$

$$A_{13}=-\frac{h_i}{2}n_{2i};\ A_{14}=\frac{h_i}{2}l_{2i};\ A_{15}=\frac{h_i}{2}m_{2i};\quad A_{16}=\frac{h_i}{2}n_{2i}$$

可以看出，推导出的罚单元刚度阵为常数矩，程序执行时，仅需形成一次，按一种立独单元组集到总刚度矩阵中去、就实现了板壳组合结构的连结。

3 结 束 语

（1）由推导可知，如程序中加入罚单元刚度阵，不仅满足了中面位移协调，而且还强行保证了整个连结处的位移协调，因此能更好地模拟结构的变形，连结处的应力也更准确可靠。

（2）上述我们处理板壳结构的连结是通过块单元作为桥梁的，当然也适用于实体与板或壳的连结处理。这在工程上带来很大的方便。使之在处理板、壳结合结构和板与实体的连结问题能用统一的程序解决。

参 考 文 献

1 曲圣年.组合结构有限元分析的罚单元法.固体力学学报，1982，（4）

2 谢贻权.弹性及塑性力学中的有限元方法.机械工业出版社，1983

（编辑：徐维森）

A FINITE ELEMENT RESEARCH ON A LINKAGE OF A COMPOSITE STRUCTURE OF SHELLS AND PLATES

Liu Longquan

(Department of Civil Engineering)

Yu Zhigang

(Department of Mechanical and Elecrical Engineering)

ABSTRACT In this paper, the penalty element stiffness matrix of linkage of plates and shells is deduced accerding to the principle of the penalty element method. This stiffness matrix can be also used for a linkage between shells and solids. It is of some practical value in the finite element calculations of engineering structure.

KEY WORDS shells and plates, finite element, penalty element