重庆建筑工程学院学报
第12卷 第2期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.2
1990年 6月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING June 1990

一类双曲型拟线性奇异方程的Cauchy问题

唐鸣放

（基础科学系）

摘 要 本文研究了一类拟线性奇异方程的Cauchy问题，证明了解的局部存在、唯一和稳定性。

关键词 奇异方程，拟微分算子，Banach空间

0 前 言

考虑方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\beta}{t}\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0 \qquad t>0,\ 0<\beta<\frac{1}{2} \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=f(x) \tag{2}$$

$$t^{2\beta}u_t|_{t=0}=g(x) \tag{3}$$

称（1）为Euler-Poisson-Darboux方程，又称为奇异方程，不少学者对该方程进行过深入的研究[1]。直到六十年代初Weinstein，Lions，Erdelyi等发现了（1）的一种分数阶积分算子以后，（1）的研究才有了新的突破。然而对于非线性的情形还未见有文章。本文以拟微分算子为工具，研究了

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\beta}{t}\frac{\partial u}{\partial t}+t^{-4\beta}P(t,\ u,\ x,\ D_x)u=g(t,\ u,\ x) \tag{4}$$

的奇性Cauchy问题，证明了解的局部存在、唯一和稳定性。

1 定义 引理

设$I\subset R^1$是有限区间，$\Omega\subset R^n$是有界区域。

定义1 定义在$I\times R^k\times\Omega\times R^n/0$上的$C^\infty$函数$p(t,\ \lambda,\ x,\ \xi)$若对任一重指标$\alpha,\gamma$以及紧集$K\subset R^k$成立

$$|D_x^\gamma D_\xi^\alpha p(t,\ \lambda,\ x,\ \xi)|\leqslant C_{\alpha,\gamma,k}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

其中$C_{\alpha,\gamma,k}$与t、λ无关，则称$p(t,\ \lambda,\ x,\ \xi)$为以t、λ为参变量的$S^m_{1,0}(\Omega)$类函数。由

本文1988年9月29日收到。

$$P(t,\lambda,x,D_x)u=\int e^{ix\cdot\xi}p(t,\lambda,x,\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi$$

定义的$P(t,\lambda,x,D)$称为依赖于t、λ的$OPS^m_{1,0}(\Omega)$类拟微分算子。简记为$P(t,\lambda)$。称$p(t,\lambda,x,\xi)$为其象征，记为σ_p。

如果当$t\to t_0\in I$，$\lambda\to\lambda_0\in R^k$时对任意的$\alpha$、$\gamma$有

$$\sup_{x,\xi}|D^\alpha_\xi D^\gamma_x p(t,\lambda,x,\xi)|(1+|\xi|)^{|\alpha|-m}\to 0$$

则称$p(t,\lambda,x,\xi)\to 0$或$P(t,\lambda)\to 0$。令$Q(t,\lambda)=P(t,\lambda)-P(t_0,\lambda_0)$自然就得到$t\to t_0$，$\lambda\to\lambda_0$时$P(t,\lambda)\to P(t_0,\lambda_0)$的定义。且若$u\in C^0_t(C^\infty_0(\Omega))$则$t\to t_0$，$\lambda\to\lambda_0$时$P(t,\lambda)u(t)\to P(t_0,\lambda_0)u(t_0)$。若$(t_0,\lambda_0)$为$I\times R^k$中每一点，则称$P(t,\lambda)$关于$t$，$\lambda$为连续的。记为$P(t,\lambda)\in C^0(I\times R^k,OPS^m_{1,0})$。若还有$D_tD_\lambda P(t,\lambda)\in C^0(I\times R^k,OPS^m_{1,0})$则称$P(t,\lambda)$关于$t$，$\lambda$连续可微。记为$P(t,\lambda)\in C^1(I\times R^k,OPS^m_{1,0})$。这时若$u\in C^1_t(C^\infty_0(\Omega))$则$D_tD_\lambda(P(t,\lambda)u(t))=(D_tD_\lambda P(t,\lambda))u(t)+D_\lambda P(t,\lambda)D_tu(t)$。同理可定义$C^i(I\times R^k,OPS^m_{1,0})$，$C^i(I,C^j(R^k,OPS^m_{1,0}))$等，$i,j=1,2,3,\cdots$。

$OPS^m_{1,0}$类拟微分算子的性质可参见[2]。

设M为正整数，$H^M=\{f\in\varepsilon'(\Omega);\ D^\alpha_xf\in L^2(\Omega),\ |\alpha|\leqslant M\}$，$\|f\|^2_{H^M}=\sum_{|\alpha|\leqslant M}\int|D^\alpha_xf|^2dx$，$\|f\|^2=\|f\|^2_{H^0}$。

定义2　如果对多重指标α有

$$\|D^\alpha_\xi p(x,\xi)\|_{H^M}\leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},\quad|\alpha|\leqslant M$$

则说$p(x,\xi)\in H^MS^m_{1,0}$。记以$H^MS^m_{1,0}$中函数为象征由(5)定义的算子集合为$OPH^MS^m_{1,0}$。

与定义1类拟也可定义带参变量的$H^MS^m_{1,0}$类函数与$OPH^MS^m_{1,0}$类算子。

关于$OPH^MS^m_{1,0}$类算子，有如下重要质性[3]

引理1　若$P\in OPH^MS^m_{1,0}$，且$M>\frac{n}{2}+\mu$，则P：$H^s\to H^s$，$|s|\leqslant\mu$是线性连续的。

由引理1和嵌入定理[2]容易证明

引理2　若$P(t,\lambda,x,D_x)\in C(I\times R^1,OPS^1_{1,0})$，$u(t,x)\in C^0_t(I,H^M)$且$M>2n$。则$P(u)=P(t,u,x,D_x)\in C^0(I,OPH^MS^1_{1,0})$且$P(u)$：$H^{M+1}\to H^M$是线性连续的。即存在$C=C(\|u\|_{H^M})$使$\|P(u)V\|_{H^M}\leqslant C\|V\|_{H^{M+1}}$，$V\in H^{M+1}$。

引理3　令$q_\varepsilon(t,x,\xi)=e^{-\varepsilon(|\xi|^2+t^{-2})}$，$(\varepsilon>0)$。则关于$t\in[0,T]$，$\{q_\varepsilon:0<\varepsilon\leqslant 1\}$是$S^0_{1,0}$中的有界子集，且对$\forall\varepsilon>0$，$t^{-2\beta}q_\varepsilon\in C^0([0,T],S^{-\infty}_{1,0})$，$(\beta>0)$。

记以q_ε为象征的拟微分算子为Q_ε。由引理3，对$\varepsilon>0$，$t^{-2\beta}Q_\varepsilon$关于$t\in[0,T]$是$H^M\to H^{M+1}$的线性连续映射。

最后，再引用[4]中一个结论

引理4　设D为Banach空间，$\mathrm{S}(D,D)$为D到自身的线性连续映射全体，$I\subset R^1$是区间。若$A(t)$是I到$\mathrm{S}(D,D)$的连续映射，$b(t)$是I到D的连续映射，则对每个$X_0\in D$，方程

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+b(t)$$

有唯一的解X定义在I上，满足$X(t_0)=X_0$，($t_0\in I$)

2 解的唯一性和稳定性

设$P(t,\ \lambda,\ X,\ D_x)\in C$ ($[0,\ T]\times R^1$, $OPS^2_{1,0}$)为椭圆算子，且其象征关于ξ为二次齐次非负的，$g(t,\ \lambda,\ X)\in C$ ($[0,\ T]\times R^1\times\Omega$)。对于方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\beta}{t}\frac{\partial u}{\partial t}+t^{-4\beta}P(t,\ u,\ X,\ D_x)u=g(t,\ u,\ X)\quad 0<t\leqslant T,\ 0<\beta<\frac{1}{2}\tag{6}$$

$$u|_{t=0}=\varphi_1(X)\tag{7}$$

$$t^{2\beta}u_t|_{t=0}=\varphi_2(X)\tag{8}$$

将其化为等价的一阶方程组来处理。令$u_0=u$，$t^{2\beta}\frac{\partial u}{\partial t}=\wedge u_1$，($\wedge$表示以$(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}$为象征的$OPS^{\frac{1}{2}}_{1,0}$拟微分算子)。则上面方程化为

$$\frac{\partial W}{\partial t}=t^{-2\beta}K(W)W+f,\qquad 0<t\leqslant T\tag{9}$$

$$W|_{t=0}=\psi$$

其中 $W=\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}$，$K(W)=\begin{pmatrix}0 & \wedge\\ -\wedge^{-1}P(t,\ u_0,\ X,\ D_x) & 0\end{pmatrix}$，

$$f=\begin{pmatrix}0\\ t^{2\beta}\wedge^{-1}g\end{pmatrix},\qquad \Psi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \wedge^{-1}\varphi_2\end{pmatrix}$$

易见$f(t,\ \lambda,\ X)\in C^0([0,\ T],\ C\ (R^2\times\Omega))\wedge C^1([0,\ T]\times R^2\times\Omega)$，$K(t,\ \lambda,\ X,\ D_x)\in C$ ($[0,\ T]\times R^2$, $OPS^1_{1,0}$)，且是严格双曲的。于是与[2]中相应定理的证明类似有

引理5 存在$R(t,\ \lambda,\ X,\ D_x)\in C^1([0,\ T]\times R^2,\ OPS^0_{1,0})$满足：

(1) 当$|\xi|$充分大时$\sigma_R(t,\ \lambda,\ X,\ \xi)$为正定矩阵。

(2) $\sigma_{RK}=-\sigma_{K^*R}\quad \mathrm{mod}S^0_{1,0}$。

其中K^*为算子K的共轭算子。

设$W\in C^0([0,\ T],\ H^M)$，固定W，再设$V\in C^0([0,\ T]H^M)\cap C^1([0,\ T],\ H^{M-1})$是

$$\frac{\partial V}{\partial t}=t^{-2\beta}K(t,\ W,\ X,\ D_x)V+f(t,\ W,\ X)\tag{11}$$

$$V|_{t=0}=\Psi\tag{12}$$

的解。记$V_\alpha=D^\alpha_xV$，$W_\alpha=D^\alpha_xW$，$f_{u\gamma}=D^u_\lambda D^\gamma_xf(t,\ \lambda,\ X)$，$K_{u\gamma}=D^u_\lambda D^\gamma_xK(t,\ \lambda,\ X,\ D_x)$。由(11)可得

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}=t^{-2\beta}K(W)V_\alpha+\sum_{\substack{\sum\rho_i+\gamma+\theta=\alpha\\ |\theta|<|\alpha|}}t^{-2\beta}C_{\theta,\gamma,\rho_1\cdots\rho_u}W_{\rho_1}\cdots W_{\rho_u}K_{u\gamma}(W)V_\theta$$

$$+\sum_{\sum\rho_i+\gamma=\alpha} C_{\gamma,\rho_1\cdots\rho_\mu} W_{\rho_1}\cdots W_{\rho_\mu} f_{u\gamma}(W)$$

记$\overline{V}=\{V_\alpha: |\alpha|\leqslant M\}$，　$\overline{W}=\{W_\alpha: |\alpha|\leqslant M\}$则上式可简记为

$$\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}=t^{-2\beta}K(W)\overline{V}+t^{-2\beta}\Phi(\overline{W},\ \overline{V})+F(\overline{W}) \tag{13}$$

其中$\Phi(\overline{W},\ \cdot)$可看成零阶算子。

易见：$V\in C^0([0,\ T],\ H^M)\Longleftrightarrow\overline{V}\in C^0([0,\ T],\ L^2)$

且
$$\|V\|^2_{H^M}=\|\overline{V}\|^2_{L^2}=\|\overline{V}\|^2 \tag{14}$$

由引理 1 、引理 2 及嵌入定理易证

引理 6　设$M>3n$，则下列结论成立：

（1）$C^0([0,\ T],\ L^2)\to C^0([0,\ T],\ L^2)$是Lipschitz 连续的，即

$$\|F(\overline{V}_1)-F(\overline{V}_2)\|\leqslant C\|\overline{V}_1-\overline{V}_2\|,\ V_1,\ V_2\in C^0([0,\ T],\ H^M) \tag{15}$$

其中$C=C(\|V_1\|_{H^M},\ \|V_2\|_{H^M})$；

（2）Φ：$C^0([0,\ T],\ L^2\times L^2)\to C^0([0,\ T],\ L^2$ 是 Lipschitz 连续的，即：当W_1，W_2，V_1，$V_2\in C^0([0,\ T],\ H^M)$ 时有

$$\|\Phi(\overline{W}_1,\ \overline{V}_1)-\Phi(\overline{W}_2,\ \overline{V}_2)\|^2\leqslant C(\|\overline{W}_1-\overline{W}_2\|^2+\|\overline{V}_1-\overline{V}_2\|^2) \tag{16}$$

其中 $C=C(\|W_1\|_{H^M},\ \|W_2\|_{H^M},\ \|V_1\|_{H^M},\ \|V_2\|_{H^M})$；

（3）若W_1，$W_2\in C^0([0,\ T],\ H^M)$，$V\in C^0([0,\ T],\ H^{M+1})$

则

$$\|(K(W_1)-K(W_2))V\|_{H^M}\leqslant C\|W_1-W_2\|_{H^M}\|V\|_{H^{M+1}} \tag{17}$$

其中 $C=C(\|W_1\|_{H^M},\ \|W_2\|_{H^M})$。

在下面的讨论中，设M充分大使得前面的引理都成立。

引理 7　若$\{K_n\}$在 $C^0([0,\ T],\ OPH^MS^1_{1,0})$中有界，$\{V_n\}$在$C^0([0,\ T],\ H^M)$中有界且满足

$$\frac{\partial V_n}{\partial t}=t^{-2\beta}K_nV_n+f \tag{18}$$

则V_n：$[0,\ T]\to H^{M-1}$是等度连续的。

证明　由（18）得$\left\|t^{2\beta}\dfrac{\partial V_n}{\partial t}\right\|_{H^{M-1}}\leqslant C<\infty$　（C与n，t无关）即存在$0<t_0<T$ 使

$$\|t^{2\beta-1}(V_n(t)-V_n(0))\|_{H^{M-1}}\leqslant C,\ t\in[0,\ t_0] \tag{19}$$

现在对$\forall\eta>0$，不妨设$\left(\dfrac{\eta}{4C}\right)^{\frac{1}{1-2\beta}}\leqslant t_0$。对$t$，$t'\in[0,\ T]$有如下三种情况：

（1）当 t，$t'\in\left[0,\ \left(\dfrac{\eta}{4C}\right)^{\frac{1}{1-2\beta}}\right]$时，由（17）

$$\|V_n(t)-V_n(t')\|_{H^{M-1}}\leqslant\|V_n(t)-V_n(0)\|_{H^{M-1}}+\|V_n(t')-V_n(0)\|_{H^{M-1}}$$

$$\leqslant \frac{\eta}{2} < \eta$$

（2）当t，$t' \in \left[\left(\frac{\eta}{4C}\right)^{\frac{1}{1-2\beta}}，T\right]$时，因$\left\|\frac{\partial V_n}{\partial t}\right\|_{H^{M-1}}$在该区间上有界，从而$V_n$在该区间上是等度连续的。故存在$\delta=\delta(\eta)$，使得当$|t-t'|<\delta$时

$$\|V_n(t)-V_n(t')\|_{H^{M-1}} \leqslant \frac{\eta}{2} < \eta$$

（3）当$t\in\left[0，\left(\frac{\eta}{4C}\right)^{\frac{1}{1-2\beta}}\right]$，$t'\in\left[\left(\frac{\eta}{4C}\right)^{\frac{1}{1-2\beta}}，T\right]$，且$|t-t'|<\delta$时，有

$\left|t'-\left(\frac{\eta}{4C}\right)^{\frac{1}{1-2\beta}}\right|\leqslant|t-t'|<\delta$，由（1），（2）可得

$$\|V_n(t)-V_n(t')\|_{H^{M-1}}<\eta$$

综合（1），（2），（3），V_n：$[0，T]\to H^{M-1}$是等度连续的。

令$\mathbf{D}_M=\{W\in C^0([0，T]，H^M)\cap C^1([0，T]，H^{M-1})$：$|W_t|=0(t^{-2\beta})\}$其中$|W_t|$表示$\sup\limits_{x\in\Omega}|W_t|$，$|W_t|=0(t^{-2\beta})$表示在$t\to0$时$|W_t|$与$t^{-2\beta}$同阶。

引理8 $\Psi\in H^M$，$W\in\mathbf{D}_M$，则（11），（12）存在唯一解$V\in\mathbf{D}_{M-1}$且满足

$$\|V(t)\|^2_{H^{M-1}}\leqslant e^{\int_0^t \tau^{-2\beta}C(\|W\|_{H^{M-1}})d\tau}\Big[\|\Psi\|^2_{H^{M-1}} + \int_0^t \|f\|^2_{H^{M-1}}\, C(\|W\|_{H^{M-1}})\, e^{-\int_0^\tau s^{-2\beta}C(\|W\|_{H^{M-1}})ds}d\tau\Big]\quad t\in[0，T] \tag{20}$$

证明　由引理2和引理3，对$\varepsilon>0$，$t\in[0，T]$，$t^{-2\beta}K_\varepsilon(W)=t^{-2\beta}K(W)Q_\varepsilon=K(W)t^{-2\beta}Q_\varepsilon$：$H^M\to H^M$是线性连续的。因此由引理4，方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}=t^{-2\beta}K_\varepsilon(W)V+f(W)$$

$$V|_{t=0}=\Psi$$

存在唯一解$V_\varepsilon\in C^1([0，T]，H^M)$。

由引理5，存在$R\in C^1([0，T]\times R^2，OPS^0_{1,0})$使得$RK+K^*R\in C^0([0，T]\times R^2，OPS^0_{1,0})$，即有$RK_\varepsilon+K^*_\varepsilon R\in C^0([0，T]\times R^2，OPS^0_{1,0})$，且对$0<\varepsilon\leqslant1$，$R(W)K_\varepsilon(W)+K^*_\varepsilon(W)R(W)$在$C^0([0,T],OPH^MS^0_{1,0})$中有界，$K_\varepsilon(W)$，$K_{uv}(W)Q_\varepsilon$在$C^0([0，T]，OPH^MS^1_{1,0})$中有界。类似于（13）有

$$\frac{\partial \overline{V_\varepsilon}}{\partial t}=t^{-2\beta}K_\varepsilon\overline{V}_\varepsilon+t^{-2\beta}\Phi_\varepsilon(\overline{W}，\overline{V})+F(\overline{W})$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial t}(R(W)\overline{V}_\varepsilon，\overline{V}_\varepsilon)=(R_t(W)\overline{V}_\varepsilon，\overline{V}_\varepsilon)+(W_tR_t(W)\overline{V}_\varepsilon，\overline{V}_\varepsilon)$$

$$+t^{-2\beta}(R(W)\Phi_\varepsilon(\overline{W},\ \overline{V}_\varepsilon),\ \overline{V}_\varepsilon)+t^{-2\beta}(R(W)\overline{V}_\varepsilon,\ \Phi(\overline{W},\ \overline{V}_\varepsilon))$$

$$+t^{-2\beta}((R(W)K_\varepsilon(W)+K_\varepsilon^*(W)R(W))\overline{V}_\varepsilon,\ \overline{V}_\varepsilon)$$

$$+(R(W)F(\overline{W}),\ \overline{V}_\varepsilon)+(R(W)\overline{V}_\varepsilon,\ F(\overline{W}))$$

$$\leqslant C(\|W\|_{H^M})(\|F\|^2+(t^{-2\beta}+\|W_t\|)(R(W)\overline{V}_\varepsilon,\ \overline{V}_\varepsilon)) \tag{21}$$

由Gronwall 不等式[5]，（14）式及R的正定性

$$\|V_\varepsilon(t)\|^2_{H^M}\leqslant e^{\int_0^t \tau^{-2\beta}C(\|W\|_{H^M})d\tau}[\|\Psi\|^2_{H^M}$$

$$+\int_0^t\|f\|^2_{H^M}C(\|W\|_{H^M})e^{-\int_0^\tau s^{-2\beta}C(\|W\|_{H^M})ds}d\tau]\quad t\in[0,\ T]$$

由上式$\{V_\varepsilon\}$是$C^0([0,\ T],\ H^M)$中有界集；从而对每个$t\in[0,\ T]$，$\{V_\varepsilon(t)\}$是H^{M-1}中相对紧的。由引理 7 和Ascoli定理[5]，$\{V_\varepsilon\}$是$C^0([0,\ T],\ H^{M-1})$中相对紧的，因而存在子序列$\{V_{\varepsilon n}\}$收敛于$V\in C^0([0,\ T],\ H^{M-1})$，再由

$$\frac{\partial V_{\varepsilon n}}{\partial t}=t^{-2\beta}K_{\varepsilon n}V_{\varepsilon n}+f$$

就得到$V\in \mathbf{D}_{M-1}$。而且V是(11)，(12)在分布意义下的解，由（20）立刻得到唯一性。

由引理 8，对固定的$\Psi\in H^M$定义了一个映射$\mathbf{F}_\Psi$：$\mathbf{D}_M\to\mathbf{D}_{M-1}$。现假设$\Psi\in H^{M+2}$，令$E=\{f\in\mathbf{D}_M$：存在$C^0([0,\ T),\ H^{M+1})$中有界序列$\{f_n\}\in\mathbf{D}_{M+1}$使得$f_n\to f(C^0([0,T],\ H^M))\}$。显然$C^0([0,\ T],\ H^{M+1})\cap C^1([0,\ T],\ H^M]$，$\subset E$，所以$E\neq\phi$。下面的定理表明$\mathbf{F}$是关于E不变的。

定理 1　$\mathbf{F}_\Psi E\subset E$。

证明　设$W\in E$，取$\{W_n\}E\mathbf{D}_{M+2}$使得$\{W_n\}$在$C^0([0,\ T],\ H^{M+1})$中有界，且$W_n\to W(C^0([0,\ T],\ H^M))$。由引理 8 存在$V_n=\mathbf{F}_\Psi W_n\in\mathbf{D}_{M+1}$，且$\{V_n\}$在$C^0([0,\ T],\ H^{M+1})$中有界。由（13）得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{V}_i-\overline{V}_j)=t^{-2\beta}(K(W_i)\overline{V}_i-K(W_j)\overline{V}_j+\Phi(\overline{W}_i,\ \overline{V}_i)-\Phi(\overline{W}_j,\overline{V}_j))$$

$$+F(\overline{W}_i)-F(\overline{W}_j)$$

与（21）类似有

$$\frac{\partial}{\partial t}(R(W)(\overline{V}_i-\overline{V}_j),\ (\overline{V}_i-\overline{V}_j))\leqslant C(\|W\|_{H^M})[\|F(\overline{W}_i)-F(\overline{W}_j)\|^2$$

$$+(t^{-2\beta}+\|W_t\|)(R(W)(\overline{V}_i-\overline{V}_j),\ (\overline{V}_i-\overline{V}_j))+$$

$$+t^{-2\beta}(1+\|\overline{V}_i\|^2_{H^1})\|\overline{W}_i-\overline{W}_j\|^2] \tag{22}$$

由Gronwall 不等式及引理 6 有

$$\|V_i(t)-V_j(t)\|^2_{H^M}\leqslant C(\|W\|_{H^M})T^{-2\beta}\sup_{t\in[0,T[}\|W_i-W_j\|^2_{H^M},\quad t\in[0,\ T]。 \tag{23}$$

可见$\{V_n\}$是$C^0([0,\ T],\ H^M)$中Cauchy序列。故

$V_n \to V \in C^0([0,\ T],\ H^M)$，即$V \in E$，$V = \mathbf{F}_\psi W$。

对$\Psi \in H^{M-2}$，令 $r \geqslant 2\|\psi\|_{H^{M+2}}^2 + 2$，由定理 1 对$W \in E$有$V = \mathbf{F}_\psi W \in E$。现设 $\sup\limits_{t \in [0,T]} \|W\|_{H^M}^2 \leqslant r$与（20）同理可得

$$\|V(t)\|_{H^M}^2 \leqslant e^{\int_0^t \tau^{-2\beta} C(\|W\|_{H^M}) d\tau} [\|\Psi\|_{H^M}^2$$

$$+ \int_0^t \|f\|_{H^M}^2 C(\|W\|_{H^M}) e^{-\int_0^\tau s^{-2\beta} C(\|W\|_{H^M}) ds} d\tau] \quad t \in [0,\ T]$$

令$C = \sup\{C(\lambda):\ |\lambda| \leqslant r\}$，则上式化为

$$\|V(t)\|_{H^M}^2 \leqslant e^{CT^{1-2\beta}} (\|\Psi\|_{H^M}^2 + CT \sup_{t \in [0,T]} \|f\|_{H^M}^2) \quad t \in [0,\ T]$$

可见存在充分小的T_0使$\|V(t)\|_{H^M}^2 \leqslant r$，$t \in [0,\ T]$。

于是$\mathbf{F}_\psi$把$E_0 = \{W \in C^0([0,\ T_0],\ H^M) \cap E,\ \sup\limits_{t \in [0,T_0]} \|W\|_{H^M}^2 \leqslant r\}$映为自身。

若W_1，$W_2 \in E_0$，则存在$V_1 = \mathbf{F}_\psi W_1$，$V_2 = \mathbf{F}_\psi W_2 \in E_0$ 在（23）中用 M-1 代替M，取 $i = 1$，$j = 2$得

$$\|V_1(t) - V_2(t)\|_{H^{M-1}}^2 \leqslant C(r) T_0^{1-2\beta} \sup_{t \in [0,T_0]} \|W_1(t) - W_2(t)\|_{H^{M-1}}^2,$$

$$t \in [0,\ T_0]$$

取T_0充分小使得$C(r) T_0^{1-2\beta} < 1$。这样E_0上映射$\mathbf{F}_\psi$在 $C^0([0,\ T_0],\ H^{M-1})$ 中为压缩的，取$V_0 \in E_0$，故$V_n = \mathbf{F}_\psi V_{n-1}$为$C^0([0,\ T_0],\ H^{M-1})$中 Cauchy 序列，从而$V_n \to V \in C^0((0,\ T_0],\ H^{M-1})$而且还有$V \in C^1([0,\ T_0],\ H^{M-2})$这就得到了$V$为方程（9），(10)的解。

若还有$W \in C_0([0,\ T_0],\ H^{M-2}) \cap C'([0,\ T_0],\ H^{M-3})$满足（9）且 $\sup\limits_{t \in [0,\ T_0]} \|W\|_{H^{M-2}}^2 \leqslant r$，在（22）中取$\bar{V} = \{V_\alpha:\ |\alpha| \leqslant -2\}\bar{W}$同理，令$W_i = V_i = W$，$W_j = V_j = V$则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(R(V)(\bar{W} - \bar{V}),\ (\bar{W} - \bar{V})) \leqslant C(\|V\|_{H^{M-2}}) [\|F(\bar{W}) - F(\bar{V})\|^2$$

$$+ (t^{-2\beta} + |V_t|)(R(V)(\bar{W} - \bar{V}),\ (\bar{W} - \bar{V}))$$

$$+ t^{-2\beta}(1 + \|V\|_{H^{M-1}}^2) \|\bar{W} - \bar{V}\|^2]$$

$$\leqslant C(\|V\|_{H^{M-1}},\ \|W\|_{H^{M-2}}) t^{-2\beta} (R(V)(\bar{W} - \bar{V}),\ (\bar{W} - \bar{V}))$$

$$\leqslant C(r) t^{-2\beta} (R(V)(\bar{W} - \bar{V}),\ (\bar{W} - \bar{V}))$$

再由Gronwall不等式得

$$\|W(t) - V(t)\|_{H^{M-2}}^2 \leqslant e^{C(r) t^{1-2\beta}} \|W(0) - V(0)\|_{H^{M-2}}^2,\quad t \in [0,\ T_0]$$

由此得到（9），（10）的解的局部唯一和稳定性。

总结以上结果，最后得到了

定理 2　若$g\in C^{\infty}([0,\ T]\times R^1\times\Omega)$，$P\in C^{\infty}([0,\ T]\times R^1,\ OPS^2_{1,0})$是椭圆算子，而且其象征关于$\xi$是二次齐次非负的，则对于充分大的正整数$M$和每个实数$r>0$，存在$0<T_r\leqslant T$，使得当$(\varphi_1,\ \varphi_2)\in G_r=\{(\varphi_1,\ \varphi_2)\in H^{M+4}\times H^{M+3}:\|\varphi_1\|^2_{H^{M+4}}+\|\varphi_2\|^2_{H^{M+3}}\leqslant r\}$ 时，方程（6），（7），（8）在$\{u\in C^1([0,\ T_r]H^M)\cap C^1([0,T_r],H^{M-1}):\sup\limits_t(\|u\|^2_{H^M}+\|u_t\|^2_{H^{M-1}})\leqslant 2r+2\}$内有唯一解，而且若初始条件在$G_r$内变化时，解还是稳定的。

参 考 文 献

1　杨光俊.奇异偏微分方程.云南大学学报，1979，(1)

2　陈恕行.偏微分方程理论.高等教育出版社，1984

3　Taylor, M. Pseudodifferential operators, Princeton Univ. Press, 1982

4　J. 迪厄多内.现代分析基础，第一卷.科学出版社，1982

（编辑：姚国安）

A CLASS OF SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR A QUASILINEAR HYPERBOLIC EQUATION

Tong Mingfang

(Department of Natural Science)

ABSTRACT　This paper studies a class of singular Cauchy problem for a quasilinear hyperbolic equation and shows that there exists a uniquely stable solution by quasi-differential operators.

KEY WORDS　singular equation, quasi-differential operator, Banach space