重庆建筑工程学学报
第12卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.4
1990年12月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Dec. 1990

解对称正定线性方程组的二阶迭代法及其收敛性

陈 祥 明

（基础科学系）

摘 要 本文给出了解对称正定线性代数方程组$Ax=b$的一类迭代法，本算法以矩阵A的自然分裂为基础，采用代参数的二步线性迭代法为主迭代过程（称为外迭代），以任一收敛的迭代法为内迭代过程，联合产生迭代序列$\{x_K\}$，从而提高了收敛速度。本文还证明了收敛性并给出了误差估计。

关键词 对称正定矩阵，二步迭代法，欧氏模

引 言

考虑方程组

$$Ax=b$$

设V^0为包含方程组(1)的解的集合。$\{\phi_K\}$为定义在$V^0\times V^0$上的算子（线性的或非线性的），且$\Phi_K(V^0\times V^0)\subseteq V^0$，则下列算法

$$x_{K+1}=\phi_{K+1}(x_{k-1},\ x_K)$$

$$K=0,\ 1,\ 2\cdots,\ x_0,\ x_1\in V_0 \tag{2}$$

称为二步迭代法，如果对$\forall x_0\in V^0$，$\{x_K\}$收敛于方程组(1)的某一解x^*，则称迭代法(2)收敛。

当方程组(1)来自于用限差分法离散化某一偏微分方程时，矩阵A通常是对称正定的[1]，且可将A分裂为

$$A=M-N$$

式中矩阵M和N分别对应于该偏微分方程中不同类型的项，并且M是对称正定的。一般说来方程组

$$My=C \tag{3}$$

将比方程组(1)容易求解。本文将按照下述方式来构造求解方程组(1)的一种二阶迭代法，其基本方法是：在产生近似序列$\{x_K\}$的每一步迭代过程中，均包含解方程组(3)，这一过程称为主迭代（或外迭代），而在解方程组(3)时，仍使用迭代法，这一过程称为内迭代。

本文1989年7月1日收到。

1　迭代格式

记号$\|\cdot\|$表示向量和矩阵的欧氏模，即

$$\|x\| = (x^T x)^{\frac{1}{2}} \qquad \|B\| = \max_{\|x\|=1}\|Bx\|$$

设A和M都是对称正定矩阵，选择参数$\alpha>0$，$\omega>0$和$0\leqslant\delta<1$，任给初始向量x^0，x_1按照下述方法产生近似序列$\{x_K\}$

$$x_{K+1} = x_{K-1} + \omega(\alpha z_K + x_K - x_{K-1}) \qquad K=1,\ 2,\ \cdots \tag{4}$$

$$Mz_K = r_K + q_K \tag{5}$$

$$r_K = b - Ax_K$$

$$\|q_K\| \leqslant \delta\|r_K\| \tag{6}$$

当$\delta=0$时，本算法即为二阶Richardson迭代法，其收敛已经证明[2]。

当$\delta>0$时，(5)，(6)两式为对方程组

$$Mz = r_K \tag{7}$$

求解的内迭代过程，当残向量的模$\|q_K\|\leqslant\delta\|r_K\|$时，该迭代过程终止，而转入外迭代(4)。如果外迭(4)式产生的近似序列$\{x_K\}$收敛于方程组(1)的解时，对应的残向量r_K必趋向于零，故对每一次内迭代均可选择$z_0=0$作为初始向量，(6)式还表示，对每一次内迭代需用因子δ去压缩残向量q_K的模，使其收敛更快。本算法对内迭代采用何种算法不加限制。

2　收敛性分析

设x^*是方程组(1)的精确解，记近似序列$\{x_K\}$的误差向量为e_K即，

$$e_K = x^* - x_K$$

注意到$r_K = Ae_K$，及(4)式得到

$$\begin{aligned} e_{K+1} &= e_{k-1} - \omega(\alpha z_K + e_{K-1} - e_K) \\ &= \omega He_K + (1-\omega)e_{K-1} + p_K \qquad K=1,\ 2\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$p_K = -\omega\alpha M^{-1}q_K$$

$$H = I - \alpha M^{-1}A \tag{9}$$

由假定M对称正定，故可分解为

$$M = M^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}$$

式中$M^{\frac{1}{2}}$亦是对称正定矩阵，由此

$$H = M^{-\frac{1}{2}}(I - \alpha M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}})M^{\frac{1}{2}} = M^{\frac{1}{2}}VDV^TM^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

式中D是对称矩阵$I-\alpha M^{-\frac{1}{2}}AM^{-\frac{1}{2}}$的特征值$\sigma_j(j=1,2,\cdots,n)$构成的对角阵，$V$是相应的特征向量构成的正交矩阵。令

$$\hat{e}_K = V^T M^{\frac{1}{2}} e_K$$

$$\hat{p}_K = V^T M^{\frac{1}{2}} p_K = -\omega\alpha V^T M^{-\frac{1}{2}} q_K \tag{11}$$

由(8)式得对角形差分方程组

$$\hat{e}_{K+1} = \omega D\hat{e}_K + (1-\omega)\hat{e}_{K-1} + P_K \quad K=1, 2, \cdots \tag{12}$$

其解由下述引理给出。

引理 1 非齐次差分方程

$$\zeta_{K+1} = \beta\zeta_K + \gamma\zeta_{K-1} + \eta_K \quad K=1, 2\cdots \tag{13}$$

对给定的初始值ζ_0, ζ_1的解由下式给出

$$\zeta_K = \theta_K\zeta_1 + \gamma\theta_{K-1}\zeta_0 + \sum_{l=1}^{K-1}\theta_{K-l}\eta_l$$

式中

$$\theta_K = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1^K - \lambda_2^K}{\lambda_1 - \lambda_2} & \text{当 } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ K\lambda_1^{K-1} & \text{当 } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

λ_1, λ_2是特征方程式$\lambda^2 - \beta\lambda - \gamma = 0$的根，其证明由一般差分方程理论给出[3]。据此可得差分方程组(12)的解

$$\hat{e}_K = S_K\hat{e}_1 + (1-\omega)S_{K-1}\hat{e}_0 + \sum_{l=1}^{K-1} S_{K-l}\hat{p}_l \quad K=1, 2, \cdots \tag{14}$$

式中S_K是对角阵，其第j对角元为

$$(S_K)_{jj} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{1,j}^K - \lambda_{2,j}^K}{\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j}} & \text{当 } \lambda_{1,j} \neq \lambda_{2,j} \\ K\lambda_{1,j}^{K-1} & \text{当 } \lambda_{1,j} = \lambda_{2,j} \end{cases} \tag{15}$$

$\lambda_{1,j}$, $\lambda_{2,j}$是特征方程式

$$\lambda^2 - \omega\sigma_j\lambda + (\omega - 1) = 0 \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{16}$$

的根。令设

$$\rho = \max_{1\leqslant j\leqslant n}(\max(|\lambda_{1,j}|, |\lambda_{2,j}|)) \tag{17}$$

对K进行归纳可以证明

$$\| S_K \| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |(S_K)_{jj}| \leqslant K\rho^{K-1}$$

又由$\lambda_{1,j}\lambda_{2,j} = \omega - 1$知$\rho^2 \geqslant |\omega - 1|$，据此在(14)式中取欧氏模得

$$\|\hat{e}_K\| \leqslant K\rho^{K-1}\|\hat{e}_1\| + (K-1)\rho^{K}\|\hat{e}_0\|$$

$$+\sum_{l=1}^{K-1}(K-l)\rho^{K-l-1}\|\hat{p}_l\| \quad K=1, 2, \cdots \tag{18}$$

式中模 $\|\widehat{p}_K\|$ 与 $\|\widehat{e}_K\|$ 有如下关系。

引理 2　如果(6)式成立，则

$$\|\widehat{p}_K\| \leqslant \varepsilon \|\widehat{e}_K\| \quad K=1,2,\cdots \tag{19}$$

式中

$$\varepsilon = \delta\omega\alpha \|M^{-\frac{1}{2}}\| \|AM^{-\frac{1}{2}}\|$$

证明　由(11)、(6)式得

$$\|\widehat{p}_K\| = \omega\alpha \|V^T M^{-\frac{1}{2}} q_K\| = \omega\alpha \|M^{-\frac{1}{2}} q_K\|$$

$$\leqslant \omega\alpha \|M^{-\frac{1}{2}}\| \|q_K\| \leqslant \delta\omega\alpha \|M^{-\frac{1}{2}}\| \|r_K\|$$

注意到

$$r_K = Ae_K = AM^{-\frac{1}{2}} V V^T M^{\frac{1}{2}} e_K$$

得出

$$\|\widehat{p}_K\| \leqslant \delta\omega\alpha \|M^{-\frac{1}{2}}\| \|AM^{-\frac{1}{2}} V V^T M^{\frac{1}{2}} e_K\|$$

$$\leqslant \delta\omega\alpha \|M^{-\frac{1}{2}}\| \|AM^{-\frac{1}{2}}\| \|VV^T M^{\frac{1}{2}} e_K\|$$

$$= \delta\omega\alpha \|M^{-\frac{1}{2}}\| \|AM^{-\frac{1}{2}}\| \|V^T M^{\frac{1}{2}} e_K\|$$

$$= \varepsilon \|\widehat{e}_K\|$$

证华。

在(18)式中，用 $\varepsilon\|\widehat{e}_l\|$ 代替 $\|\widehat{p}_l\|$ 得到

$$\|\widehat{e}_K\| - \varepsilon \sum_{l=1}^{K-1} (K-l)\rho^{K-l-1} \|\widehat{e}_l\|$$

$$\leqslant K\rho^{K-1} \|\widehat{e}_1\| + (K-1)\rho_K \|\widehat{e}_0\| \quad K=1,2,\cdots,m \tag{20}$$

这里 m 是外迭代序列 $\{x_K\}$ 计算到项 x_m 时的指标。故(20)式由 m 个不等式组成的线性不等式组，其矩阵形式为

$$(I-\varepsilon L)(\|\widehat{e}_1\|, \cdots, \|\widehat{e}_m\|)^T \leqslant S$$

式中 L 是非负严格下三角阵，向量 S 由(20)式右端项确定。注意到 $L^m=0$，于是

$$(I-\varepsilon L)^{-1} = I + \varepsilon L + \cdots + \varepsilon^{m-1} L^{m-1}$$

由此知 $(I-\varepsilon L)^{-1}$ 亦是非负矩阵，且

$$(\|\widehat{e}_1\|, \cdots, \|\widehat{e}_m\|)^T \leqslant (I-\varepsilon L)^{-1} S \tag{21}$$

定义 $t=(Z_1, \cdots, Z_m)^T = (I-\varepsilon L)^{-1} S$，由(21)、(20)式知 Z_K 满足

$$Z_K = K\rho^{K-1} \|\widehat{e}_1\| + (K-1)\rho^K \|\widehat{e}_0\| + \varepsilon \sum_{l=1}^{K-1} (K-l)\rho^{K-l-1}$$

$$K=1, 2, \cdots, m.$$

当 $K=1$时，$Z_1=\|\widehat{e}_1\|$，为方便计，定义$Z_0=-\|\widehat{e}_0\|$由引理1，Z_K是下列差分方程的解

$$Z_{K+1}=2\rho Z_K-\rho^2 Z_{K-1}+\varepsilon Z_K \qquad K=1,\ 2,\ \cdots$$

其非齐次项为εZ_K，相应的特征方程式有等根ρ。另一方面，上述差分方程亦可视为齐次的

$$Z_{K+1}=(2\rho+\varepsilon)Z_K-\rho^2 Z_{K-1}$$

再次由引理1得

$$Z_K=\frac{V_1^K-V_2^K}{V_1-V_2}Z_1-\rho^2\frac{V_1^{K-1}-V_2^{K-1}}{V_1-V_2}Z_0 \tag{22}$$

式中V_1，V_2是特征方程式

$$\lambda^2-(2\rho+\varepsilon)\lambda+\rho^2=0$$

的根。设

$$\widetilde{\rho}=\max\{V_1,\ V_2\}$$

则

$$\widetilde{\rho}=\rho+\frac{\varepsilon}{2}+(\rho\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4})^{\frac{1}{2}}$$

$$=\rho+\rho^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{2}+0(\varepsilon^{\frac{1}{2}})>0 \tag{23}$$

当 $\varepsilon<<1$，$\widetilde{e}<1$时，由(21)，(22)式知$\lim\limits_{K\to\infty}\|\widehat{e}_K\|=0$，再注意到$e_K=M^{-\frac{1}{2}}V\widehat{e}_K$，得知$\lim\limits_{K}\|e_K\|=0$。

综上所述，得到下列收敛性定理

定理 当$\widehat{\rho}<1$时，由(4)式(5)式和(6)式所定义的迭代算法收敛，且有误差估计式

$$\|\widehat{e}_K\|\leqslant K\widetilde{\rho}^{K-1}\|\widehat{e}_1\|+(K-1)\widetilde{\rho}^K\|\widehat{e}_0\|$$

式中$\widetilde{\rho}\doteq\widetilde{\rho}(\delta,\ \alpha,\ \omega)$由(23)，(20)，(19)，(17)和(16)式确定。

3 算 例

考虑在边界为Γ的单位正方形区域R中的广义Dirichlet问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(B\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(B\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+Cu=F \quad (x,\ y)\in R\\ u|_\Gamma=g\end{cases} \tag{24}$$

式中B是正函数。且在R内两次连续可微，$C\leqslant 0$，C和F在R内连续，g在Γ上连续。
为求得问题的数值解，在R上设置一个网格尺寸为$h=1/(t+1)$的均匀正方形网格，在R内共有t^2个网格点，在网格点上用差分代替微分将方程(24)离散化为近似线性代数方程组

$$(M-N)u_t=d \tag{25}$$

式中u_t是$t^2\times 1$的未知向量，为离散化问题的解，d是$t^2\times 1$向量，对应于方程(24)的右端项，M和N都是$t^2\times t^2$矩阵，且$M=M^T$，$N=-N^T$它们分别对应于方程(24)中偶阶导数项

和奇阶导数项。这里仅考虑一个具体微分方程的求解，为此设$B(x,y)=5e^{x^2+y^2}$，$C(x,y)=-10e^{3x^2+3y^2}$，在Γ上$g\neq 0$，而微分方程有精确解$u(x,y)=e^{x^2+y^2}$。

右表给出了使用本文所述算法1，内迭代采用共轭梯度法，取$t=15$，$a=1$，$\omega=1.25$，当参数δ取不同值时，迭代到$\|r_m\|\leqslant 10^{-8}$时终止迭代，所需的外迭代和内迭代次数。

δ	m	w
0.001	41	331
0.01	43	258
0.2	45	113
0.6	64	108
0.8	145	145

这里m记外迭代次数，w记完成m次外迭代所需内迭代的总迭代次数。迭代过程的初始向量$x_0=0$，x_1由下式确定

$$x_1=z_0+x_0,\qquad Mz_0=r_0+q_0,\qquad \|q_0\|\leqslant\delta\|r_0\|$$

每次内迭代的初始向量均取为零。

参 考 文 献

1 G. D. Smith. Numerical Solution of Partial Differential Equations .Oxford Vniversity Press, 1978

2 Golub G. H. and Varga. R. S. Chebyshev, Semi—iterative methods. Successive methods. Successive Overrelaxation iterative methods. Parts I and II, Numer. Math. 8, pp.147—168, 1961

3 偏微分方程数值解法．南京大学数学系计算数学专业编．科学出版社，1979

（编辑：姚国安）

ALGORITHM AND CONVERGENCE OF TWO-STAGE ITERATIVE PROCEDURE FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

Chen Xiangming

(Department of Natural Science)

ABSTRACT This papr discusses algorithm and convergence of two-stage iteratve procedure for solving systems of symmetric positive definite linear equation Ax=b. On the basis of nature splitting of A, this algorithm makes two-step linear iterative procedure (named outer iteration) and makes convergent inner iteraton of any kind. They generate a sequence of approximations $\{x_k\}$ which converges to the solution Ax=b quickly. This paper also proves is convergene and gives the estimation of error.

KEY WORDS symmetric positive definite matrix, two-stage iteration, Euclidean norm