重庆建筑工程学院学报
第12卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.4
1990年12月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Dec. 1990

广义特征行列式的直接展开法

陈 进*

（机电系）

摘 要 本文将广义特征行列式展开成多项式，对其系数表达式从数学上加以了证明。并编制了相应的程序。

关键词 广义特征行列式，特征值，特征值计算

在结构力学问题中利用瑞利—里兹法求解稳定性问题的临界载荷，是根据一组齐次线性方程组的系数行列式来导出计算临界荷载的n次多项式；在工程振动和线性代数中计算矩阵的特征值时，也需要根据特征行列式来导出计算特征值的n次多项式。所有这些行列式都可以表示为下面将要讨论的广义特征行列式。导出由广义特征行列式展成多项式的一般公式，将为解决此类问题提供一种通用的计算机算法。

1 定义和定理

定义： n阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & \cdots & a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & \cdots & a_{2n}+\lambda b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & a_{n2}+\lambda b_{n2} & \cdots & a_{nn}+\lambda b_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

称为一个广义特征行列式。其中a_{ij}，b_{ij}为实常数，λ为特征值。

在(1)式中令$b_{ij}(i\neq j)=0$，$b_{ij}(i=j)=-1$，便得到通常的特征行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

本文1990年2月4日收到。

* 本院赴南斯拉夫卢布尔雅那大学进修生

定理：由广义特征行列式(1)展成的 n 次多项式

$$P(\lambda)=\sum_{m=0}^{n}C_{n-m}\lambda^{n-m} \tag{2}$$

其系数为：

$$\begin{cases} C_{n-m}=\displaystyle\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\ k_2=k_1+1,\cdots,n-m+2\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\begin{vmatrix} b_{11}\cdots b_{1k_1-1}\ a_{1k_1}\ b_{1k_1+1}\cdots b_{1k_2-1}\ a_{1k_2}\ b_{1k_2+1}\cdots b_{1k_m-1}\ a_{1k_m}\ b_{1k_m+1}\cdots b_{1n}\\ b_{21}\cdots b_{2k_1-1}\ a_{2k_1}\ b_{2k_1+1}\cdots b_{2k_2-1}\ a_{2k_2}\ b_{2k_2+1}\cdots b_{2k_m-1}\ a_{2k_m}\ b_{2k_m+1}\cdots b_{2n}\\ \vdots\\ b_{n1}\cdots b_{nk_1-1}a_{nk_1}\ b_{nk_1+1}\cdots b_{nk_2-1}a_{nk_2}\ b_{nk_2+1}\cdots b_{nk_m-1}a_{nk_m}\ b_{nk_m+1}\cdots b_{nn}\end{vmatrix} & (m\neq 0)\\ C_{n-m}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2}\cdots & b_{nn}\end{vmatrix} & (m=0)\end{cases} \tag{3}$$

下面用数学归纳法加为证明。

1)　当 $n=1$ 时，由(2)和(3)式：

$P(\lambda)=\Delta=|a_{11}+\lambda b_{11}|=\lambda b_{11}+a_{11}$，定理成立。

2)　当 $n=2$ 时，由(2)和(3)式：

$$P(\lambda)=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12}\\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}+\lambda\left(\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12}\\ a_{21} & b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}\\ b_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\lambda^2(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})$$

$$+\lambda(a_{11}b_{22}-b_{12}a_{21}+b_{11}a_{22}-a_{12}b_{21})+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

再直接展开得：

$$P(\lambda)=\Delta=(a_{11}+\lambda b_{11})(a_{22}+\lambda b_{22})-(a_{12}+\lambda b_{12})(a_{21}+\lambda b_{21})$$

$$=a_{11}a_{22}+\lambda a_{11}b_{22}+\lambda b_{11}a_{22}+\lambda^2 b_{11}b_{22}-a_{12}a_{21}-\lambda a_{12}b_{21}-\lambda b_{12}a_{21}-\lambda^2 b_{12}b_{21}$$

$$=\lambda^2(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})+\lambda(a_{11}b_{22}-b_{12}a_{21}+b_{11}a_{22}-a_{12}b_{21})+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

可见定理对 $n=2$ 亦成立。

3)　设定理对直到 n 成立，检查对 $n+1$ 是否成立：

$$P(\lambda)=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & \cdots & a_{1n}+\lambda b_{1n} & a_{1n+1}+\lambda b_{1n+1}\\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & \cdots & a_{2n}+\lambda b_{2n} & a_{2n+1}+\lambda b_{2n+1}\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & a_{n2}+\lambda b_{n2} & \cdots & a_{nn}+\lambda b_{nn} & a_{nn+1}+\lambda b_{nn+1}\\ a_{n+11}+\lambda b_{n+11} & a_{n+12}+\lambda b_{n+12} & \cdots & a_{n+1n}+\lambda b_{n+1n} & a_{n+1n+1}+\lambda b_{n+1n+1}\end{vmatrix}$$

令：

$$\Delta^*=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \cdots & a_{1n}+\lambda b_{1n} & a_{1n+1}\\ \vdots & & & \cdots\\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & \cdots & a_{nn}+\lambda b_{nn} & a_{nn+1}\\ a_{n+11}+\lambda b_{n+11} & \cdots & a_{n+1n}+\lambda b_{n+1n} & a_{n+1n+1}\end{vmatrix}$$

$$\Delta^b=\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & \cdots & a_{1n}+\lambda b_{1n} & \lambda b_{1n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+\lambda b_{n1} & \cdots & a_{nn}+\lambda b_{nn} & \lambda b_{nn+1} \\ a_{n+11}+\lambda b_{n+11} & \cdots & a_{n+1n}+\lambda b_{n+1n} & \lambda b_{n+1n+1} \end{vmatrix}$$

根据行列式性质：$\Delta=\Delta^a+\Delta^b$，再将Δ^a和Δ^b均按第$n+1$列展开，则：

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+n+1}a_{in+1}\Delta^a_{in+1}+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+n+1}\lambda b_{in+1}\Delta^b_{in+1}$$

其中每一个子式$\Delta^a_{ij}=\Delta^b_{ij}$均是一个形如式(1)的$n$阶广义行列式，根据归纳法假设，可将其按定理展开。

为书写方便，引入记号：

$$\Delta^{k_m}_{in+1}=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots a_{1k_1} & \cdots a_{1k_2} & \cdots a_{1k_m} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_{i-11} & \cdots a_{i-1k_1} & \cdots a_{i-1k_2} & \cdots a_{i-1k_m} & \cdots & b_{i-1n} \\ b_{i+11} & \cdots a_{i+1k_1} & \cdots a_{i+1k_2} & \cdots a_{i+1k_m} & \cdots & b_{i+1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_{n+11} & \cdots a_{n+1k_1} & \cdots a_{n+1k_2} & \cdots a_{n+1k_m} & \cdots & b_{n+1n} \end{vmatrix}$$

其中虚线的地方全是b元素

于是：

$$P(\lambda)=\Delta=(-1)^{1+n+1}a_{1n+1}\Big\{\lambda^n\Delta^0_{1n+1}+\lambda^{n-1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{1n+1}+\cdots+\lambda^{n-m}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\ k_2=k_1+1,\cdots,n-m+2\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_m}_{1n+1}$$

$$+\cdots+\lambda^1\sum_{\substack{k_1=1,2\\ k_2=k_1+1,\cdots,3\\ \vdots\\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{n-1}}_{1n+1}+\Delta^{k_n}_{1n+1}\Big\}$$

$$+(-1)^{2+n+1}a_{2n+1}\Big\{\lambda^n\Delta^0_{2n+1}+\lambda^{n-1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{2n+1}+\cdots+\lambda^{n-m}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\ k_2=k_1+1,\cdots,n-m+2\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_m}_{2n+1}$$

$$+\cdots+\lambda^1\sum_{\substack{k_1=1,2\\ k_2=k_1+1,\cdots,3\\ \vdots\\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{n-1}}_{2n+1}+\Delta^{k_n}_{2n+1}\Big\}$$

$$+$$
$$\vdots$$
$$+(-1)^{n+1+n+1}a_{n+1n+1}\Big\{\lambda^n\Delta^0_{n+1n+1}+\lambda^{n-1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{n+1n+1}+\cdots+\lambda^{n-m}$$

$$\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\k_2=k_1+1,\cdots,n-m+2\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}} \Delta^{k_m}_{n+1\,n+1} + \cdots + \lambda' \sum_{\substack{k_1=1,2\\k_2=k_1+1,\cdots,3\\ \vdots \\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}} \Delta^{k_{n-1}}_{n+1\,n+1}\quad \Delta^{k_n}_{n+1\,n-1}\Big\}$$

$$+(-1)^{1+n+1}\lambda b_{1\,n+1}\Big\{\lambda^n\Delta^0_{1\,n+1}\ \lambda^{n-1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{1\,n+1}+\cdots+\lambda^{n-m}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\k_2=k_1+1,\cdots,n-m+2\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_m}_{1\,n+1}$$

$$+\cdots+\lambda'\sum_{\substack{k_1=1,2\\k_2=k_1+1,\cdots,3\\ \vdots\\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{n-1}}_{1\,n+1}+\Delta^{k_n}_{1\,n+1}\Big\}$$

$$+(-1)^{2+n+1}\lambda b_{2\,n+1}\Big\{\lambda^n\Delta^0_{2\,n+1}+\lambda^{n-1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{2\,n+1}+\cdots+\lambda^{n-m}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\k_2=k_1+1,\cdots,n-m+2\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_m}_{2\,n+1}$$

$$+\cdots+\lambda'\sum_{\substack{k_1=1,2\\k_2=k_1+1,\cdots,3\\ \vdots\\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{n-1}}_{2\,n+1}+\Delta^{k_n}_{2\,n+1}\Big\}$$

$$(-1)^{n+1+n+1}\lambda b_{n+1\,n+1}\Big\{\lambda^n\Delta^0_{n+1\,n+1}+\lambda^{n-1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{n+1\,n+1}$$

$$+\cdots+\lambda^{n-m}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\k_2=k_1+1,\cdots,n-m+2\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\Delta^{k}_{n+1\,n+1}+\cdots+\lambda'\sum_{\substack{k_1=1,2\\k_2=k_1+1,\cdots,3\\ \vdots\\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{n-1}}_{n+1\,n+1}+\Delta^{k_n}_{n+1\,n+1}\Big\}$$

将其按 λ 的同次幂进行组合：

$$\lambda^{n+1}\Big\{(-1)^{1+n+1}b_{1\,n+1}\Delta^0_{1\,n+1}+(-1)^{2+n+1}b_{2\,n+1}\Delta^0_{2\,n+1}+\cdots+(-1)^{n+1+n+1}b_{n+1\,n+1}\Delta^0_{n+1\,n+1}\Big\}=\lambda^{n+1}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1}&b_{1\,n+1}\\ \vdots&&&\vdots\\ b_{n+1\,1}&\cdots&b_{n+1\,n}&b_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}$$

$$\lambda^n\Big\{(-1)^{1+n+1}a_{1\,n+1}\Delta^0_{1\,n+1}+(-1)^{2+n+1}a_{2\,n+1}\Delta^0_{2\,n+1}+\cdots+(-1)^{n+1+n+1}a_{n+1\,n+1}\Delta^0_{n+1\,n+1}$$

$$+(-1)^{1+n+1}b_{1\,n+1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{1\,n+1}+(-1)^{2+n+1}b_{2\,n+1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{2\,n+1}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1+n+1}b_{n+1\,n+1}\sum_{k_1=1,\cdots,n}\Delta^{k_1}_{n+1\,n+1}\Big\}$$

$$=\lambda^n\left\{\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots b_{1n}&a_{1\,n+1}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{n+1\,1}&\cdots b_{n+1\,n}&a_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}+\sum_{k_1=1,\cdots,n}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&a_{1k_1}&\cdots&b_{1n}&b_{1\,n+1}\\ \vdots&&&&&\vdots\\ b_{n+1\,1}&\cdots&a_{n+1k_1}&\cdots&b_{n+1\,n}&b_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\lambda^n\sum_{k_1=1,\cdots,n+1}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&a_{1k_1}&\cdots&b_{1\,n+1}\\ \vdots&&&&\vdots\\ b_{n+1\,1}&\cdots&a_{n+1k_1}&\cdots&b_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}$$

$$\lambda^{n-m}\Big\{(-1)^{1+n+1}a_{1\,n+1}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_m}_{1\,n+1}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1+n+1}a_{n+1\,n+1}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_m}_{n+1\,n+1}$$

$$+(-1)^{1+n+1}b_{1\,n+1}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m\\ k_2=k_1+1,\cdots,n-m+1\\ \vdots\\ k_{m+1}=k_m+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{m+1}}_{1\,n+1}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1+n+1}b_{n+1\,n+1}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m\\ k_2=k_1+1,\cdots,n-m+1\\ \vdots\\ k_{m+1}=k_m+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{m+1}}_{n+1\,n+1}\Big\}$$

$$=\lambda^{n-m}\Big\{\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\ \vdots\\ k_m=k_{m-1}+1,\cdots,n}}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots a_{1k_1} & \cdots a_{1k_2} & \cdots a_{1k_m} & \cdots b_{1n} & a_{1\,n+1}\\ \vdots & & & & & \vdots\\ b_{n+1\,1} & \cdots a_{n+1k_1} & \cdots a_{n+1k_2} & \cdots a_{n+1k_m} & \cdots b_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}$$

$$+\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m\\ k_2=k_1+1,\cdots,n-m+1\\ \vdots\\ k_{m+1}=k_m+1,\cdots,n}}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots a_{1k_1} & \cdots a_{1k_2} & \cdots a_{1k_m} & \cdots a_{1k_{m+1}} & \cdots b_{1n} & b_{1\,n+1}\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ b_{n+1\,1} & \cdots a_{n+1k_1} & \cdots a_{n+1k_2} & \cdots a_{n+1k_m} & \cdots a_{n+1k_{m+1}} & \cdots b_{n+1\,n} & b_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}\Big\}$$

$$=\lambda^{n-m}\sum_{\substack{k_1=1,\cdots,n-m+1\\ \vdots\\ k_{m+1}=k_m+1,\cdots,n+1}}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots a_{1k_1} & \cdots a_{1k_2} & \cdots a_{1k_m} & \cdots a_{1k_{m+1}} & \cdots b_{1\,n+1}\\ \vdots & & & & & \vdots\\ b_{n+1\,1} & \cdots a_{n+1k_1} & \cdots a_{n+1k_2} & \cdots a_{n+1k_m} & \cdots a_{n+1k_{m+1}} & \cdots b_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}$$

$$\lambda'\Big\{(-1)^{1+n+1}a_{1\,n+1}\sum_{\substack{k_1=1,2\\ k_2=k_1+1+1,\cdots,3\\ \vdots\\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{n-1}}_{1\,n+1}+\cdots+(-1)^{n+1+n+1}a_{n+1\,n+1}\sum_{\substack{k_1=1,2\\ k_2=k_1+1,\cdots,3\\ \vdots\\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}}\Delta^{k_{n-1}}_{n+1\,n+1}$$

$$+(-1)^{1+n+1}b_{1\,n+1}\Delta^{k_n}_{1\,n+1}+\cdots+(-1)^{n+1+n+1}b_{n+1\,n+1}\Delta^{k_n}_{n+1\,n+1}\Big\}$$

$$=\lambda'\Big\{\sum_{\substack{k_1=1,2\\ \vdots\\ k_{n-1}=k_{n-2}+1,\cdots,n}}\begin{vmatrix} a_{1k_1} & \cdots a_{1k_{i-1}} & b_{1k_i} & a_{1k_{i+1}} & \cdots a_{1n} & a_{1\,n+1}\\ \vdots & & & & & \vdots\\ a_{n+1k_1} & \cdots a_{n+1k_{i-1}} & b_{n+1k_i} & a_{n+1k_{i+1}} & \cdots a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}$$

$$+\sum_{\substack{k_1=1,1\\ \vdots\\ k_n=k_{n-1}+1,\cdots,n}}\begin{vmatrix} a_{1k_1} & \cdots a_{1k_n} & b_{1\,n+1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n+1k_1} & \cdots a_{n+1k_n} & b_{n+1\,n+1}\end{vmatrix}\Big\}$$

$$-\lambda' \sum_{\substack{k_1=1,2\\ \vdots \\ k_n=k_{n-1}+1,\cdots,n+1}} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_{i-1}} & b_{1k_i} & a_{1k_{i+1}} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ a_{n+1k_1} & \cdots & a_{n+1k_{i-1}} & b_{n+1k_i} & a_{n+1k_{i-1}} & \cdots & a_{n+1n} & a_{n+1n+1} \end{vmatrix}$$

$$\lambda^0 \left\{ (-1)^{1+n+1} a_{1n+1} \Delta_{1n+1}^{k_n} + \cdots + (-1)^{n+1+n+1} a_{n+1n+1} \Delta_{n+1n+1}^{k_n} \right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1n+1} \end{vmatrix}$$

综上可得：

$$P(\lambda) = \lambda^{n+1} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n+1} \\ \vdots & & \\ b_{n+1} & \cdots & b_{n+1n+1} \end{vmatrix} + \lambda^{(n+1)-1} \sum_{k_1=1,\cdots,n+1} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & a_{1k_1} & \cdots & b_{1n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{n+1} & \cdots & a_{n+1k_1} & \cdots & b_{1n+1} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \lambda^{(n+1)-(m+1)} \sum_{\substack{k_1=1,\cdots,(n+1)-(m+1)+1\\ \vdots \\ k_{m+1}=k_m+1,\cdots,(n+1)}} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_2} & \cdots a_{1k_{m+1}} & \cdots b_{1n+1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_{n+11} & \cdots a_{n+1k_1} & \cdots & a_{n+1k_2} & \cdots a_{n+1k_{m+1}} & \cdots b_{n+1n+1} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \lambda^1 \sum_{\substack{k_1=1,2\\ \vdots \\ k_n=k_{n-1}+1,\cdots,(n+1)}} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_{i-1}} & b_{1k_i} & a_{1k_{i+1}} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n+1k_1} & \cdots & a_{n+1k_{i-1}} & b_{n+1k_i} & a_{n+1k_{i+1}} & \cdots & a_{n+1n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n+11} & \cdots a_{n+1n+1} \end{vmatrix}$$

所述定理正确，证毕。

2 算法与例题

本展开法的关键是计算展开后的多项式系数 C_{n-m}。由（3）式可见，计算 C_{n-m} 需进行 m 重循环，但 m 是可变的，即循环重数随 m 而变化。这里采用一种，“回溯的自顶向下”算法，可以解决可调循环问题。

令 $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

求 C_{n-m} 实际上就是将由 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 所决定的 A 中相应的 k_m 列代替 B 中相应的列，然后对所有可能组成的行列式求和。为此，需进行的 m 重循环为：

$$\begin{aligned} & k_1 = 1, \cdots, n-m+1 \\ & k_2 = k_1+1, \cdots, n-m+2 \\ & \vdots \\ & k_i = k_{i-1}+1, \cdots, n-m+i \\ & \vdots \\ & k_m = k_{m-1}+1, \cdots, n \end{aligned}$$

算法步骤如下：

1） $k_1 = 1$

$k_2 = k_1 + 1$

$\vdots$

$k_m = k_{m-1} + 1$

$C_{n-m} = 0$，$I = m$

2）进行最内层循环，即对 k_n 从 k_m 直到 n 进行循环；

将 A 中的 k_1，$k_2\cdots$，k_m 列代替 B 中相应的列，每代替一次求和一次。

$$C_{n-m}=C_{n-m}+\det(B)$$

3）退回到外一层循环，即 $I=I-1$

考虑第 I 层循环是否已完成，即：如果 $k_i<n-m+I$，则第 i 层循环还未完成，转步骤 4 向前向下推进；反之转步骤 6 检查是否已完成所有循环。

4）第 i 层循环前进一个步长，并下推到内一层循环，即 $k_i=k_i+1$，$i=i+1$

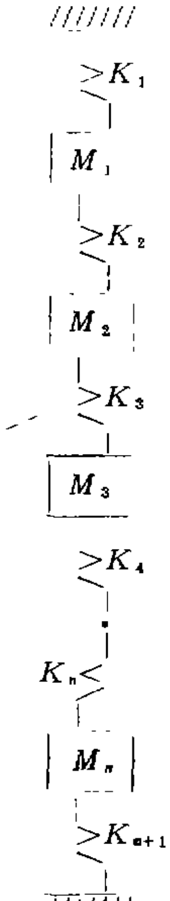
5）如果 $i=m$，表示已推进到最内层，则转步骤 2 进行最内层循环。反之转步骤 4 向前向下推进。

6）如果 $I=1$，表示最外层循环已完成，转步骤 7 结束整个循环。反之转步骤 3 退回到外一层循环。

7）结束。

例题：对于如图所示的机械振动系统，其特征矩阵为：

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{K_1+K_2}{M_1} & \frac{-K_2}{M_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\frac{-K_2}{M_2} & \frac{K_2+K_3}{M_2} & \frac{-K_3}{M_2} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
0 & \frac{-K_3}{M_3} & \frac{K_3+K_4}{M_3} & \frac{-K_4}{M_3} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
0 & 0 & \frac{-K_4}{M_4} & \frac{K_4+K_5}{M_4} & \frac{-K_5}{M_4} & \cdots\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \frac{-K_{n-1}}{M_{n-1}} & \frac{K_{n-1}+K_n}{M_{n-1}} & \frac{-K_n}{M_{n-1}} & \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \frac{-K_n}{M_n} & \frac{K_n+K_{n+1}}{M_n} &
\end{array}$$



无阻尼多自由度振动系统

该系统的自然频率 ω^2 即为该特征矩阵的特征值 λ

即　$\omega^2=\lambda$

设　$n=8$，$M_1=M_2=\cdots=M_8=4$

　　$K_i=i$，$i=1,2,\cdots,9$

试用本文所述的直接展开法，求其特征多项式。

解：根据题设可生成数组 A 和 B

计算过程和结果如下：

```
N = :          EP = :
8 ,            0.0001
READ A(N,N)
0.75, -0.50,  0.00,  0.00,  0.00,  0.00,  0.00,  0.00
```

```
0.50,   1.25, -0.75,  0.00,  0.00,  0.00,  0.00,  0.00
0.00,  -0.75,  1.75, -1.00,  0.00,  0.00,  0.00,  0.00
0.00,   0.00, -1.00,  2.25, -1.25,  0.00,  0.00,  0.00
0.00,   0.00,  0.00, -1.25,  2.75, -1.50,  0.00,  0.00
0.00,   0.00,  0.00,  0.00, -1.50,  3.25, -1.75,  0.00
0.00,   0.00,  0.00,  0.00,  0.00, -1.75,  3.75, -2.00
0.00,   0.00,  0.00,  0.00,  0.00,  0.00, -2.00,  4.25
READ B(N, N)
-1,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0
 0, -1,  0,  0,  0,  0,  0,  0
 0,  0, -1,  0,  0,  0,  0,  0
 0,  0,  0, -1,  0,  0,  0,  0
 0,  0,  0,  0, -1,  0,  0,  0
 0,  0,  0,  0,  0, -1,  0,  0
 0,  0,  0,  0,  0,  0, -1,  0
 0,  0,  0,  0,  0,  0,  0, -1
THE ANSWER IS: C(1), C(2), …C(8) =:
  -20.000000     157.062500    -623.437500    1341.445000
-1557.656000     912.216800    -227.900400      15.664310
stop - Program terminated
```

由于 $C_{n-0}=\det(B)=1$，因此，展开后的多项式为：

$$P(\lambda)=\lambda^8-20\lambda^7+157.0625\lambda^6-623.4375\lambda^5+1341.4450\lambda^4$$
$$-1557.656\lambda^3+912.2168\lambda^2-227.9004\lambda+15.6643$$

用任何一种求多项式根的方法求出其根，即可求得该振动统系的自然频率。

$\omega_1^2=6.593518$， $\omega_2^2=4.708399$， $\omega_3^2=3.366539$， $\omega_4^2=2.342620$

$\omega_5^2=1.544235$， $\omega_6^2=0.912859$， $\omega_7^2=0.425054$， $\omega_8^2=0.106776$

3 程序说明及程序清单

1） 各子程序段说明：

FILL 将数组B放入数组D中

POLY 求广义特征行列式展开后的多项式系数

DET 利用高斯消元法求行列式的值

2） 主要变量名说明：

N 广义特征行列式的阶

EP 高斯消元法选主元时用作无穷小正数

A 广义特征行列式中 a 元素组成的数组，A(N, N)

B 广义特征行列式中 b 元素组成的数组，B(N,N)

C　　存放多项式系数的数组，C(N)

D　　工作数组，D(N,N)

E　　工作数组，E(N,N)

K　　用来存放列下标的数组，K(N,N)

L　　工作数组，存放每一次循环选定的列下标，L(N)

3）输入输出说明：

使用时只需根据提示输入维数N，无穷小正数EP，数组A和B。

进行结束时将输出展开后的多项式系数C(N)。

4）程序清单：（略）

4　结束语

利用本文的方法可以将任意维数的广义特征行列式直接展成多项式，并用任一多项式求根方法求出特征值。本文方法简单，实用性强。只是在阶数较高且多项式性态较坏时，多项求根较为困难且误差较子空间迭代法大。此外，本文提出的“回溯的自顶向下”算法可用于程序设计中的可调循环问题。

参考文献

1 Brice Carnahan, H.A.Luther, James O.Wilkes. Applied Numerical Methods. John Wiley & Sons, Inc. 1969

2 D.J.Hatter. Matrix Computer Methods of Vibration Analysis. Butterworth & Co (Publishers) Ltd. 1973

（编辑：刘家凯）

THE DIRECT EXPANSION OF GENERALIZED CHARACTERISTIC DETERMINANT

Chen Jin

(Department of Mechanical and Electrical Engineering)

ABSTRACT In this paper, the parameter expression of expanded polynomial of generalized charactristic determinant is worked out and proved mathematically. The relevant computer program is also provided.

KEY WORDS generalized characteristic determinant, eigenvalue, calculation of eigenvalue