

结构优化设计的准满负荷法

陈良春 周裕综

(建筑工程系)

摘要 本文提出的准满负荷法,思路简捷,程序实施容易,收敛快,优化结果安全可靠、经济实用。文中给出了实际工程中空间桁架优化设计的数学模型,指出了工程界流行的优化设计方法存在的问题,详细阐述了结构准满负荷设计的方法及其突出特点。

关键词 空间桁架, 准满负荷设计, 结构优化设计

引言

实际工程中,桁架的重量最小化问题在数学上可以写成:
求最优的桁架杆件断面积 $A_k (k = 1, 2, 3, \dots, m)$, 使得桁架的重量

$$W = \sum_{k=1}^m \rho_k A_k l_k \quad (1)$$

最小化, 而且桁架各杆均满足强度或压杆稳定、刚度和截面规格化的约束:

$$\left. \begin{aligned} -\varphi_k f_{ck} &\leq \sigma_{kj} \leq f_{tk} \\ -[\lambda_{ck}] &\leq \alpha_{kj} \lambda_k \leq [\lambda_{tk}] \\ A_k &\in \mathbf{A} \\ (k &= 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, J) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 k, m ——分别为杆件序号和杆件总数;
 j, J ——分别为工况序号和工况总数;
 ρ_k, l_k, A_k ——分别为第 k 号杆的材料比重、几何长度和截面积;
 σ_{kj} ——第 k 号杆在工况 j 下的应力 (设计值);
 f_{tk}, f_{ck} ——分别为第 k 号杆的抗拉、抗压设计强度;
 $[\lambda_{tk}], [\lambda_{ck}]$ ——分别为第 k 号杆受拉、受压时的容许长细比;
 \mathbf{A} ——杆件规格截面面积的集合;

本文1989年12月13日收到。

λ_k ——第 k 号杆对截面两主轴长细比的最大值 $\lambda_k = \max_{x,y} \left\{ \frac{l_{xk}}{i_{xk}}, \frac{l_{yk}}{i_{yk}} \right\}$, 这里

l_{xk} 、 i_{xk} 为第 k 号杆对截面 x 轴的计算长度和回转半径而 l_{yk} 、 i_{yk} 为对截面 y 轴的计算长度和回转半径;

φ_k ——第 k 号杆对截面两主轴稳定系数的最小值 $\varphi_k = \min_{x,y} \{\varphi_{xk}, \varphi_{yk}\}$;

α_{kj} ——应力符号, 当 $\sigma_{kj} \geq 0$ 时 $\alpha_{kj} = 1$, 当 $\sigma_{kj} < 0$ 时 $\alpha_{kj} = -1$.

桁架结构的节点位置、材料性质以及外荷载均已给定, 共有 J 个不同工况的外荷载。

对于这个非线性整数规划类的结构优化设计数学模型, 综合考虑计算工作量的大小与计算结果的有效性, 最难解决的问题是杆件截面必须取离散的给定的截面规格表中的值。目前求解这类题目的方法主要有两类, 一类是数学上的整数规划方法, 另一类是求凑整解的近似方法^[1]。整数规划类方法耗用机时较多, 用于杆件不多的小型结构是可行的, 但用于实际工程中大量的杆件较多的大中型结构是不现实的。求凑整解的方法先将杆件截面积视为连续型变量, 仅考虑杆件强度, 间或也近似地考虑压杆稳定求出最优解, 然后从给定的截面规格表中为每一根杆挑选一个接近且大于最优解的截面, 并按此最优解的内力考虑杆件的强度、长细比限制和压杆稳定。由于工程上限制杆件的规格数和最小截面规格, 给定的截面规格表中最小截面面积以及两相邻截面的面积差值均较大, 所以凑整解与连续变量最优解相差较大, 内力重分布的影响也较大, 致使凑整解中大约有10%的截面不安全(其中多数是压杆承载力不够)或不经济, 因此凑整解不宜直接用于实际工程。本文提出的结构优化设计的准满负荷法, 有效地解决了大型桁架的实用优化设计问题。

1 计算方法及其特点

上述优化问题的求解可以归结为寻求一个满负荷设计。所谓满负荷设计, 是指桁架中的每一根杆件至少在一种工况下拉应力等于抗拉设计强度, 或压应力等于临界抗压设计强度, 或长细比等于容许长细比。如用数学语言来描述, 则满负荷设计是这样的一组截面积 A_k

($k=1, 2, 3, \dots, m$), 对每一个 k 都存在一个 j 使得

$$\max_{j \in J} \left\{ \frac{\sigma_{kj}}{[\sigma_{kj}]} \right\} = 1 \quad \text{或} \quad \max_{j \in J} \left\{ \frac{\alpha_{kj} \lambda_k}{[\lambda_{kj}]} \right\} = 1 \quad (3)$$

成立。

式中

$$[\sigma_{kj}] = \begin{cases} f_{tk} & \text{当 } \sigma_{kj} \geq 0 \\ -\varphi_k f_{ck} & \text{当 } \sigma_{kj} < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$[\lambda_{kj}] = \begin{cases} [\lambda_{tk}] & \text{当 } \sigma_{kj} \geq 0 \\ -[\lambda_{ck}] & \text{当 } \sigma_{kj} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

集合 J 定义为 $J = \{1, 2, 3, \dots, J\}$, 记号 $j \in J$ 表示工况 j 是给定的工况 $1, 2, \dots, J$ 中的某一个。

式(3)的意义是对 k 杆依次计算各工况 j ($j=1, 2, 3, \dots, J$)下的实际应力与设计强度的比值 $\sigma_{kj}/[\sigma_{kj}]$ 和实际长细比与容许长细比的比值 $\alpha_{kj} \lambda_k / [\lambda_{kj}]$, 再从中选最大值, 这个最大值等于1。式(4)的意义是, 如果 σ_{kj} 是拉应力, 则 $[\sigma_{kj}]$ 取抗拉设计强度 f_{tk} ; 如果 σ_{kj} 是

压应力, 则 $[\sigma_{kj}]$ 为压杆稳定平衡的临界抗压设计强度的负值 $-\varphi_k f_{ck}$, 或者对于可不计算压杆稳定的杆件就取其抗压设计强度的负值 $-f_{ck}$ (此时 $\varphi_k = 1$). 式(5)的意义是, 如果 σ_{kj} 是拉应力, 则 $[\lambda_{kj}]$ 取拉杆容许长细比 $[\lambda_{tk}]$; 如果 σ_{kj} 是压应力, 则 $[\lambda_{kj}]$ 取压杆容许长细比的负值 $-[\lambda_{ck}]$.

不难看出, 只要让每一根杆件均达到满负荷, 则整个桁架处于满负荷工作状态, 在保证安全的前提下其重量最轻.

实际工程中桁架杆件截面积 A_k 不是连续型变量, 只能取某些离散值, 难以实现满负荷设计, 只能寻求准满负荷设计以获得一个重量较轻且施工方便的桁架. 下面给出准满负荷法的迭代方法:

第一步 $k_1 = 0$; 给定初始设计 $A_k^{(k_1)}$ 、供挑选的截面规格表: 面积 $A = \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_n | \bar{A}_1 < \bar{A}_2 < \bar{A}_3 < \dots < \bar{A}_n\}$ 和相应的回转半径 $i_x = \{\bar{i}_{x1}, \bar{i}_{x2}, \bar{i}_{x3}, \dots, \bar{i}_{xn}\}$, $i_y = \{\bar{i}_{y1}, \bar{i}_{y2}, \bar{i}_{y3}, \dots, \bar{i}_{yn}\}$.

第二步 分析断面积 $A_k^{(k_1)}$ 的设计, 求出各工况下的杆件内力 $N_k^{(k_1)}$.

第三步 从截面规格表中为各杆选一最为合适的截面积 $A_k^{(k_1+1)} = \bar{A}_g$ 、相应的回转半径 $i_{xk}^{(k_1+1)} = \bar{i}_{xg}$ 和 $i_{yk}^{(k_1+1)} = \bar{i}_{yg}$, 使桁架达到准满负荷工作状态. 即满足:

$$\max_{j \in J} \left\{ \frac{N_k^{(k_1+1)}}{A_k^{(k_1+1)} [\sigma_{kj}]} \right\} \leq 1 \quad \text{同时} \quad \max_{j \in J} \left\{ -\frac{\alpha_{kj} \lambda_k}{[\lambda_{kj}]} \right\} \leq 1$$

而对一切 $g < h$, 当取 $A_k^{(k_1+1)} = \bar{A}_g$, $i_{xk}^{(k_1+1)} = \bar{i}_{xg}$ 和 $i_{yk}^{(k_1+1)} = \bar{i}_{yg}$ 时有

$$\max_{j \in J} \left\{ \frac{N_k^{(k_1+1)}}{A_k^{(k_1+1)} [\sigma_{kj}]} \right\} > 1 \quad \text{或} \quad \max_{j \in J} \left\{ -\frac{\alpha_{kj} \lambda_k}{[\lambda_{kj}]} \right\} > 1$$

第四步 若对于一切 k 满足 $A_k^{(k_1+1)} = A_k^{(k_1)}$, 则最优解 $A_{kopt} = A_k^{(k_1+1)}$, 停止迭代. 否则 $k_1 \leftarrow k_1 + 1$, 应再转入第二步.

上述由第 k_1 次的内力 $N_k^{(k_1)}$ 求改进的断面积 $A_k^{(k_1+1)}$ 的方法, 实质上假定了桁架各杆的内力不随断面积的变更而变化, 并且要求 $A_k^{(k_1+1)}$ 达到准满负荷. 对于静定桁架, 这个假定完全满足, 所以上述计算方法运用于静定桁架时迭代一次便能收敛. 对于超静定桁架, 断面积的变化要引起内力重分布, 上面这个假定的力学意义只是将结构暂时静定化^[2].

大量的算例和典型考题计算表明, 结构优化设计的准满负荷法具有如下一些特点:

- 1) 收敛快. 一般迭代六、七次即收敛且收敛时迭代的次数不随结构规模而改变.
- 2) 所有的结构均能达到准满负荷设计. 计算时不存在满应力法有时会出现最优点附近振荡不收敛的现象, 当然也不会出现结构退化的现象.
- 3) 迭代收敛的速度受初始设计 $A_k^{(0)}$ 不同取值的影响较小. 一般情况无影响, 就是用满应力法^[2]或结构优化设计的改进可行方向法^[3]按连续型变量仅考虑强度条件的优化结果作为该法迭代的 $A_k^{(0)}$, 与 $A_k^{(0)} = C$ 相比, 最优解(结构重量和各杆截面积)十分接近, 收敛时迭代的次数当 $A_k^{(0)} = C$ 时仅多二至三次.

(4) 供挑选的截面规格对最优解影响较大。最小截面规格的面积或相邻截面规格之间的面积差值越大，最优解的结构重量越大，准满负荷法迭代的次数越少。反之亦然。所以为了获得较小结构重量的设计，在列截面规格时必须尽量减小最小截面规格的面积和相邻截面规格间的面积差值，但截面规格数将增多，应以工程允许为度。

(5) 杆件计算长度系数的影响也较大。计算长度系数越大，由长细比限制和压杆稳定确定的截面与由强度条件确定的截面的面积差值越大，从而内力重分布越大，迭代的次数就越多，最优解的结构重量越大。反之亦然。

(6) 迭代收敛的速度开始很快，以后渐慢。一般情况下，经第一次迭代后有70%以上的杆件处于准满负荷工作状态，经过五六次迭代就可使98%以上的杆件达到准满负荷，满足工程设计的要求，只要再进行二至三次迭代就一定能使100%的杆件实现准满负荷，从而获得最优解。

2 算例

用准满负荷法编制的空间桁架优化设计程序，我们计算了数十个不同类型、不同支承和不同荷载的超静定结构，结果都相当理想。为了说明某些事实，这里列举其中四个结构。

例1 如图1所示，某周边支承、平面尺寸 $72 \times 30\text{m}$ 的正交正放焊接空心球节点钢管杆件网架，网格尺寸 $3 \times 3\text{m}$ ，网架高度 3m ，上弦作用 5.59kN/m^2

(设计值)的均布荷载，钢材Q235，供挑选的截面见表1。根据《网架结构与施工规定》

(JGJ7-80)，网架的计算模型为铰接空间桁架；杆件的计算长度系数为：弦杆和支座腹杆0.9，一般腹杆0.75；容许长细比为：压杆180，一般拉杆400，支座附近拉杆300。根据《钢结构设计规范》(GBJ17-88)，钢材的设计强度取 215N/mm^2 ，压杆的稳定系数按a类截面确定。

例2 图2所示正放四角锥网架，平面尺寸 $30 \times 30\text{m}$ ，网格尺寸 $3 \times 3\text{m}$ ，网架高 2.121m ，在上弦承受设计值为 2.70kN/m^2 的均布荷载，其余条件同例1。

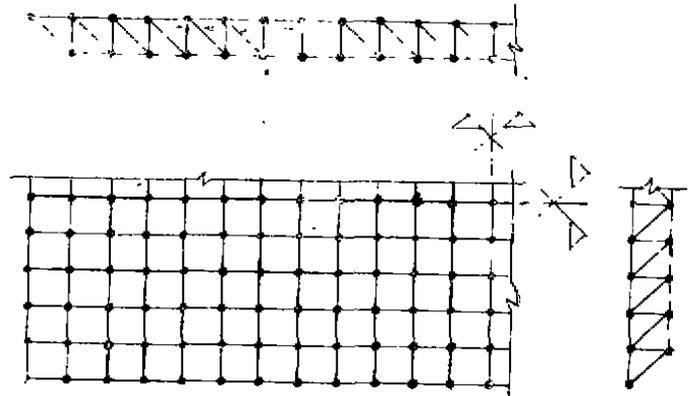


图1 $72 \times 30\text{m}$ 正交正放网架

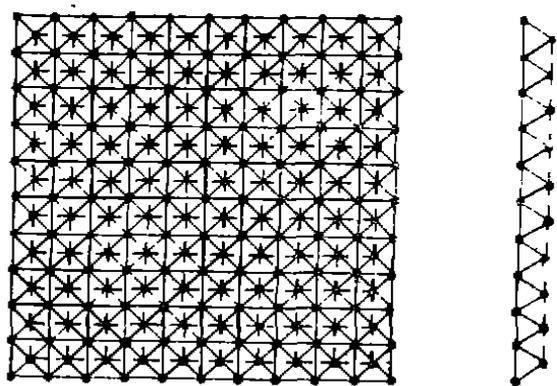


图2 $30 \times 30\text{m}$ 正放四角锥网架

表1 供挑选截面

截面型号	面积 (mm ²)	回转半径 (mm)
φ50×4.0	578	16.3
φ50×6.5	888	15.5
φ60×6.5	1090	19.1
φ70×6.5	1300	22.6
φ83×6.5	1560	27.2
φ83×10.0	2290	26.1
φ102×10.0	2890	32.7
φ114×10.0	3270	37.0
φ114×14.0	4400	35.7
φ127×14.0	4970	40.2

表2 25杆塔架荷载(kN)

节点	F _x	F _y	F _z
1	10	100	-50
2	0	100	-50
3	5	0	0
6	5	0	0

表3 供挑选截面

截面型号	面积 (mm ²)	回转半径 (mm)
φ30×2.0	176	9.9
φ42×3.0	368	13.8
φ60×3.5	621	20.0
φ76×4.0	905	25.5
φ114×5.0	1712	38.6

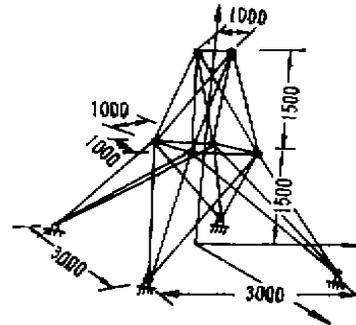


图3 25杆输电塔架

表4 优化结果

优化方法	顺序	迭代次数	内力分析次数	西门子计算机cpu时间(s)	结果中不安全或不经济的杆件数	重量(kg)
遗传方法	1	5	6	19.4045	55	13239.5
	2	5	6	6.6174	20	3810.9
	3	5	6	6.6488	23	5820.6
	4	4	5	3.1102	3	233.6
可行域方法	1	7	9	27.1113	50	13198.7
	2	2	4	5.7200	6	3741.5
	3	2	4	5.7400	22	5675.4
	4	2	4	3.5142	2	220.8
正负荷方法	1	2	8	12.1687	54	13218.0
	1	5	6	20.3464	14	13211.1
	1	8	9	28.5421	2	13114.2
	2	4	5	6.1746	0	3809.6
其他方法	3	4	5	6.3168	0	5623.1
	4	1	2	2.4722	0	231.8

例3 图2所示一平面尺寸30×30m的正放四角锥螺纹球节点钢管杆件网架，网格尺寸3×3m，网架高2.238m，四柱支承，支点设于下弦对角线上邻近角部节点的第2个节点。上弦作用5.59kN/m²（设计值）的均布荷载。根据《网架结构设计及施工规定》（JGJ7—80），杆件的计算长度系数全部取1.0，其余条件同例1。

例4 图3所示的输电塔架，节点荷载设计值如表2，供挑选的截面见表3，钢材Q235，设计强度 215N/mm^2 ，杆件的计算长度系数均取1.0，容许长细比同例1，压杆的稳定系数按a类截面确定。

例4有10个节点25根杆。利用结构对称性计算网架的1/4，例1有138个节点420根杆，例2，3有71个节点210根杆。表4列出了上述四个例题分别用满应力法、改进可行方向法和本文的准满负荷法计算的主要结果。其中前两种优化方法按连续型变量迭代收敛后，考虑与准满负荷法完全相同的约束条件求凑整解。

3 结 语

诸算例的计算结果表明，本文方法与前述两种较有代表性的方法相比，在耗用机时相当的情况下，计算结果中不安全或不经济的杆件数较少。而且可以再适当增加迭代次数使本文方法计算的任何桁架中不安全或不经济的杆件数为零或降至容许数目。而求凑整解的方法对此无能为力，计算结果中一般存在较多不安全或不经济的杆件。三种方法计算的结构重量接近也证明了本文方法的有效性。因为结果中不安全或不经济的杆件数不同，所以不能以结构重量的大小来准确对比各方法的有效性，但一般说来按本文方法算得的结构重量应更接近于桁架的最小重量，特别是在计算结果中没有出现不安全或不经济杆件的情况。当然，与其他优化方法一样，本文方法一般也只能求得局部最优解。另外，本文方法计算过程简单，程序编制容易，便于推广应用。由此可见，结构优化设计的准满负荷法，对于铰接杆系结构不失为一种理想的实用优化方法。

由于我们水平有限，对这种优化方法研究得不够充分，问题在所难免，敬请专家们批评指正。

参 考 文 献

- 1 李炳威. 结构的优化设计. 北京: 科学出版社, 1979. 240—242
- 2 程耿东. 工程结构优化设计基础. 北京: 水利电力出版社, 1984. 36—48
- 3 周裕综, 陈良春. 结构优化设计的改进可行方向法. 重庆建筑工程学院学报, 1985, 7(3): 17—26

(编辑: 徐维森)

THE QUASI-FULL LOAD METHOD FOR OPTIMUM STRUCTURAL DESIGN

Chen Liangchun Zhou Yuzong

(Department of Civil Engineering)

ABSTRACT This paper presents the quasi-full load method, which has many advantages. Its thinking is simple and direct. Its program is

easily carried out, its convergence rate is fast and the optimal result is safe, reliable, economical and practical. This paper gives the mathematical model of the space trusses optimum design in practical project, and points out the shortcomings of optimum method often applied by engineers. The method and the peculiarity of quasi-full load structural design are gone into details.

KEY WORDS space truss, quasi-full load design, optimum structural design