重庆建筑工程学院学报
第12卷第4期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.12 No.4
1990年12月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING Dec. 1990

层流边界层方程零解的稳定性分析

曹 树 孝
（基础科学系）

摘 要 二维不可压层流边界层方程经相似变换可化为Blasius方程。本文将Blasius方程 $2f''' + ff'' = 0$ 作变量变换，化为二阶非线性自治系统，利用其近似的线性系统讨论了零解附近的稳定性。

关键词 层流边界层，自治系统，稳定性

众所周知，二维不可压层流边界层方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

是一个非线性偏微分方程组，但引入流函数：$\psi = \sqrt{\nu x V_\infty} f(\eta)$，$u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$，$v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ 后，可将其化为非线性常微分方程

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{1}$$

其中，$f = f(\eta)$，此即著名的Blasius方程，它不能得出初等形式的解，一般是根据其边界条件进行数值求解。

下面，据微分方程的定性和稳定性理论，提出一种变量变换，将方程（1）化为其等价的二阶自治系统（即二阶非线性常微分方程组），讨论其在零解附近的稳定性。

1 将(1)化为二阶自治系统

作变量变换

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{ff'}{f''} \\ x_2 = \dfrac{f'^2}{ff''} \\ t = \log|f'| \end{cases} \tag{2}$$

本文1989年6月17日收到。

因 $f'=\frac{df}{d\eta}$，于是 $\frac{d\eta}{dt}=\frac{f'}{f''}$，由（1）有 $f'''=-\frac{1}{2}ff''$。（2）式中的 x_1，x_2 对 t 求导可得

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{dx_1}{d\eta}\ \frac{d\eta}{dt}=\frac{f'}{f''}\ \frac{(f'^2+ff'')f''-ff'f'''}{f''^2}$$

$$=\frac{ff'}{f''}\ \frac{(f'^2+ff'')f''+\frac{1}{2}f^2f'f''}{ff''^2}=\frac{ff'}{f''}\ \frac{ff''+\frac{1}{2}f^2f'+f'^2}{ff''}$$

$$=x_1\left(1+\frac{1}{2}x_1+x_2\right)$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{dx_2}{d\eta}\ \frac{d\eta}{dt}=\frac{f'}{f''}\ \frac{2ff'f''^2-f'^2(f'f''+ff''')}{f^2f''^2}$$

$$=\frac{f'^2}{ff''}\ \frac{2ff''^2-f'^2f''+\frac{1}{2}f^2f'f''}{ff''^2}=\frac{f'^2}{ff''}\ \frac{2ff''+\frac{1}{2}f^2f'-f'^2}{ff''}$$

$$=x_2\left(2+\frac{1}{2}x_1-x_2\right)$$

于是得出与（1）式等价的二阶非线性自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1\left(1+\dfrac{1}{2}x_1+x_2\right)\\[2ex]\dfrac{dx_2}{dt}=x_2\left(2+\dfrac{1}{2}x_1-x_2\right)\end{cases}\tag{3}$$

或改写为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+X_1(x_1,x_2)\\[2ex]\dfrac{dx_2}{dt}=2x_2+X_1(x_1,x_2)\end{cases}\tag{4}$$

其中 $X_1(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_1^2+x_1x_2$，$X_2(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_1x_2-x_2^2$

2 对二阶自治系统(3)的稳定性的讨论

令（3）式右端为0，即

$$\begin{cases}x_1\left(1+\dfrac{1}{2}x_1+x_2\right)=0\\[2ex]x_2\left(2+\dfrac{1}{2}x_1-x_2\right)=0\end{cases}\tag{5}$$

可得到（3）的奇点（平衡点，临界点）有两个，记为

$$O(0,\ 0)\text{及}\ B\left(-3,\frac{1}{2}\right)$$

以下分别就这两个奇点讨论二阶自治系统（3）在其零解附近的稳定性。

2.1 对于奇点O(0,0)的稳定性

因$X_1(x_1,x_2)$ 和$X_2(x_1,x_2)$在点$O(0,0)$的邻域内满足

$$\lim_{x_1^2+x_2^2\to 0}\frac{X_1(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=0,\quad \lim_{x_1^2+x_2^2\to 0}\frac{X_2(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=0$$

故可用（3）的线性自治系统代替非线性自治系统（3）来研究其零解的稳定性。取（3）的线性自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=2x_2\end{cases}\tag{6}$$

线性系统（6）的特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

得特征值：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$。对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\text{ 及 }\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

显然，可直接得出（6）的通解为

$$\begin{cases}x_1=c_1e^{t}\\ x_2=c_2e^{2t}\end{cases}$$

其中，c_1，c_2为任意常数。

在x_1—x_2相平面上的相轨线簇为

$$x_2=cx_1^2$$

其中，$c=c_2/c_1^2$。

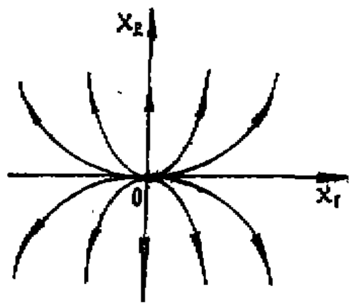

图 1

在几何上，因系统（6）的特征值均为正，故（6）的零解是不稳定结点，即当$t\to\infty$时，相轨线远离原点$O(0,0)$，并以横轴为这些抛物线（即相轨线簇）的渐近线。如图1所示。

所以，原二阶非线性自治系统（3）在奇点$O(0,0)$的零解是不稳定的。

2.2 对于奇点 $B(-3,\frac{1}{2})$ 的稳定性

为了讨论自治系统（3）的零解在奇点$B(-3,\frac{1}{2})$处的稳定性，可先作平移变换，使之化为等价于原点的情形。为此，令

$$\begin{cases}\bar{x}_1=x_1+3\\ \bar{x}_2=x_2-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

则（3）化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}_1}{dt}=-\dfrac{3}{2}\bar{x}_1-3\bar{x}_2+\overline{X}_1(\overline{x_1},\ \overline{x_2})\\ \dfrac{d\overline{x_2}}{dt}=\dfrac{1}{4}\overline{x_1}-\dfrac{1}{2}\overline{x_2}+\overline{X}_2(\overline{x_1},\ \overline{x_2})\end{cases}\qquad(7)$$

其中，$\overline{X}_1(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)=\frac{1}{2}\bar{x}_1^2+\overline{x_1}\ \overline{x_2}$，$\overline{X}_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\frac{1}{2}\overline{x_1}\ \overline{x_2}-\bar{x}_2^2$

显然，系统（7）的稳定性与其线性系统的稳定性是一致的，故取（7）的线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x_1}}{dt}=-\dfrac{3}{2}\overline{x_1}-3\overline{x_2}\\ \dfrac{d\overline{x_2}}{dt}=\dfrac{1}{4}\overline{x_1}-\dfrac{1}{2}\overline{x_2}\end{cases}\qquad(8)$$

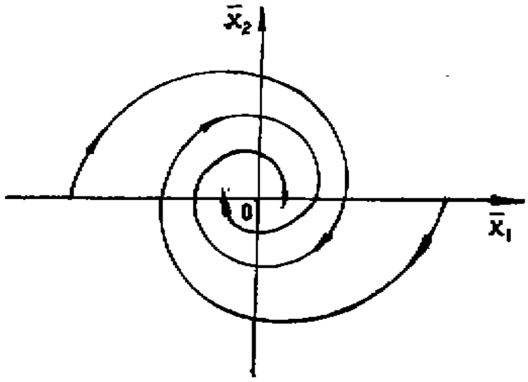

图 2

由系统（8）的特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda+\dfrac{3}{2} & -3\\ \dfrac{1}{4} & \lambda+\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+\frac{3}{2}=0$$

得特征根为：$\lambda_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i$，$\lambda_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i$。

因特征值的实部均为负，故系统（8），亦即系统（7）的零解为稳定焦点，在$\bar{x}_1-\bar{x}_2$相平面上的轨线是一簇顺时针旋转的螺线，当$t\to\infty$时，趋近于原点。如图2所示。

下面可进一步求出系统（8）的通解。

相应于特征值$\lambda_1=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i$和$\lambda_2=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i$的特征向量为

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}i\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{2}}{6}i\end{pmatrix}$$

故系统（8）的复数解为

$$\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}i\end{pmatrix}e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i)t}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}i\end{pmatrix}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)=e^{-t}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{1}{6}\end{pmatrix}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+\begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right\}$$

$$+ie^{-t}\left[\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t+\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right]$$

于是得系统（8）的通解为

$$\begin{cases}\overline{x_1}(t)=c_1e^{-t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_2e^{-t}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ \overline{x_2}(t)=c_1e^{-t}\left(-\frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{6}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+c_2e^{-t}\left(-\frac{1}{6}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{6}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\end{cases}\tag{9}$$

显然，$\lim\limits_{t}\left(\tilde{x}_1^2(t)+\tilde{x}_2^2(t)\right)=0$。

所以系统（8）的解是渐近稳定的。故原二阶非自治系统（3）在奇点$B(-3,\frac{1}{2})$处的零解是渐近稳定的。

3 在李雅普诺夫意义下的稳定性

根据李雅普诺夫稳定性理论，再次讨论相应于奇点$B(-3,\frac{1}{2})$的线性系统（8）的稳定性，对2.2中所得的结论作进一步验证。

由线性自治系统（8）的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

因矩阵A正定的充要条件为

$$PA+A^TP=-Q$$

其中，A^T为A的转置阵，可令$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$P$为待求的对称阵。于是

$$\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}&P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&\frac{1}{4}\\-3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}&P_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

可得方程组

$$\begin{cases}-3P_{11}+\frac{1}{2}P_{12}=-1\\-3P_{11}-2P_{12}+\frac{1}{4}P_{22}=0\\-6P_{12}-P_{22}=-1\end{cases}$$

解得 $P_{11}=\frac{29}{96}$，$P_{12}=-\frac{3}{16}$，$P_{22}=\frac{17}{8}$。故待求的正定对称阵P为

$$P=\begin{bmatrix}\frac{29}{96} & -\frac{3}{16}\\ -\frac{3}{16} & \frac{17}{8}\end{bmatrix}$$

由P可作出李雅普诺夫函数$V(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)$为

$$V(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)=(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)\begin{bmatrix}\frac{29}{96} & -\frac{3}{16}\\ -\frac{3}{16} & \frac{17}{8}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{pmatrix}=\frac{29}{96}\bar{x}_1^2-\frac{3}{8}\bar{x}_1\bar{x}_2+\frac{17}{8}\bar{x}_2^2$$

不难验证$V(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)$是正定的，$V(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$沿系统（8）的导数$\frac{dV}{dt}$为

$$\frac{dV}{dt}=-\bar{x}_1^2-\bar{x}_2^2$$

显然，$\frac{dV}{dt}$是负定的，而V为正定。故根据李雅普诺夫判别准则，可以判定系统（8）是渐近稳定的。这与前面2.2的讨论完全一致。从而说明原二阶非线性自治系统（3）的零解在奇点$B(-3,\ \frac{1}{2})$处是渐近稳定的。

4 奇点所满足的微分方程的解及其物理解释

由前述1中所作的变量变换（2）：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{ff'}{f''}\\ x_2=\dfrac{f'^2}{ff''}\end{cases}$$

假设$f\neq0$，$f''\neq0$。对应于奇点$O(0,0)$及$B(-3,\ \frac{1}{2})$所应满足的微分方程

当$x_1=x_2=0$时

$$f'=0$$

得通解

$$f=f(\eta)=\text{常数}$$

当$x_1=-3$时

$$3ff''+ff'=0$$

不难求出此二阶非线性方程的通解

$$\ln\frac{\sqrt{6c_1}-f}{\sqrt{6c_1}+f}=\frac{1}{2\sqrt{c_1}}(\eta+c_2)$$

当 $x_2 = \frac{1}{2}$ 时

$$ff'' - 2f'^2 = 0$$

此二阶非线性方程的通解

$$f = -\frac{1}{c_3\eta + c_4}$$

以上 c_1，c_2，c_3，c_4 均为任意常数。

由建立Blasius方程实际的物理背景 $f' = \frac{u}{V}$，$\psi = \sqrt{\nu x V}\ f(\eta)$，$\eta = \frac{y}{\delta}$，$\delta$ 是边界层厚度。对此可作简单的物理解释。

当 f = 常数，即 $u = 0$ 时，边界层内的流动是不稳定的；流函数 ψ 与 η 无关。

当 $f \neq$ 常数，即 $u \neq 0$，边界层内的流动是稳定的，并且是渐近稳定的，流函数 ψ 与 η 有关。

这与实际上边界层内的流动现象是符合的。

5 结 束 语

对于层流边界层方程转化成的Blasius方程，本文用了一种适当的变量变换将其化成二阶非线性自治系统（即方程组），利用线性近似讨论其零解附近的稳定性。结果表明：等价于Blasius 方程的二阶非线性系统含有两个奇点对应于零解所确定的未被扰动运动，在相平面上一个奇点是不稳定的，一个奇点是渐近稳定的。用所求得的李雅普诺夫函数进一步证实了其中一个奇点的渐近稳定性。对所引入的变换相应的微分方程的解表明：稳定性与边界层内的流动现象是一致的。

本文仅对层流边界层最简单的平面定常等压流动情况作了稳定性讨论。对于其它更复杂的高阶非线性常微分方程解的稳定性，有待找出类似于（2）的变量变换，这种变换应使所得出的非线性自治系统，能够充分利用现有的微分方程定性和稳定性理论的结果，使这些理论得到实际的应用。

讨论边界层方程解的稳定性的意义在于：我们不需潜心于去求出微分方程的解（因它们不能轻易求得！）而将其转化到相平面（或相空间）上，对解曲线（即相轨线）的性态进行分析研究。这方面的工作还有待我们去做进一步的探索。

参 考 文 献

1 吴望一．流体力学(下册)．北京大学出版社，1983
2 贺建勋、王志成．常微分方程(下册)．湖南科学技术出版社，1981
3 蔡燧林、盛骤．常微分方程与稳定性理论．高等教育出版社，1986
4 A·B. Tayler. Mathematical Models in Applied Mechanics. 1986

（编辑：姚国安）

ANALYSIS OF THE ZERO SOLUTION STABILITY OF LAMINAR BOUNDARY LAYER EQUATION

Cao Shuxiao
(Department of Natural Science)

ABSTRACT Two-dimensional incompressible laminar boundary layer equation can be changed into Blasius equation by means of similarity transformation. In this paper, Blasius equation $2f''' + ff'' = 0$ is transferred into a nonlinear and autonomous system of second order by variable transforming. Taking the advantage of its approximation to linear system, the stability near zero solution can be discussed.

KEY WORDS laminar boundary layer, autonomous system, stability