重庆建筑工程学院学报
第13卷第3期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF ARCHITECTURE AND ENGINEERING Vol.13 No.3
1991年9月 Sept.1991

一类路图的哈密尔顿圈

张建高
（建管系）

摘　要　设G是一个图，我们用$\Pi_k(G)$表示G中所有具有k个顶点的路P_k所成之集。图G的路图$P_k(G)$有顶点集$\Pi_k(G)$，且$P_k(G)$中的两个顶点相邻表示两条路P_k的并形成G中的一条路P_{k+1}或一个圈C_k。H.J.Broersma和C.Hoeda[1]研究了路图的一些性质，并提出了两个猜想：1）若T是一颗树，$\triangle(T)\geqslant 4$，则$P_3(T)$不是哈密尔顿图；2）若G是唯一圈图，$\triangle(G)\geqslant 5$，则G不是哈密尔顿图。在本文中，我们证明了这两个猜想是对的。

关键词　哈密尔顿图，路图，1_2_树

我们采用J.A.Bondy和U.S.R.Murty[2]中的术语和记号。设G是一个图，$V(G)$和$E(G)$分别表示G的顶点集和边集，P_k表示G中有k个顶点的路，C_k表示长为k的圈。若v，$u\in V(G)$，我们用$d_G(v,u)$表示在G中顶点v和u之间的距离，$d_G(v)$表示v在G中的度，$d(G)$表示图G的直径。我们记$|G|=|V(G)|$。$\Pi_k(G)$表示G中所有具有k个顶点的路P_k所成之集，$S(G)$表示G的剖分图。在本文中，我们考虑的图都是简单图。H.J.Broersma和C.Hoeda[1]提出了路图的概念，并研究了它们。

路图是线图的延伸和拓广，而线图在图论中有着重要的地位，同时在网格技术等方面也有着广泛的应用。然而，线图却是一般路图的一个特殊情况，即路图$P_2(G)$。本文中研究的P_3-路图和线图有着密切的联系，关于这方面的一些结果可在[1]中找到。因此，对路图的研究将能使我们更进一步了解线图和原图的一些性质。

定义1　一个图G的路图$P_k(G)$有顶点集$\Pi_k(G)$，且$P_k(G)$的两个顶点有边连接表示两条路P'_k和P''_k的并形成G中的一条路P_{k+1}或一个圈C_k。一个图称为P_k_图，如果它同构于某个图H的路图$P_k(H)$。我们也称$P_k(G)$是图G的P_k_图。

以下，我们主要考虑P_3_图。

定义2　设G是一个连通图，$P_3=vmu$是一条路，$d_G(m)=2$，若m是G的割点，且子

本文1990年11月14日收到。

图G-m的两个分枝均不同构于K_1，则称路P_3：vmu是G的一条桥路。

定理A （［1］中引理2.2）如果vmu是图G中的一条桥路，则vmu是$P_3(G)$的一个割点。

关于树的P_3_图的哈密尔顿圈，H.J.Broersma和C.Hoeda有下面的结果。最后，他们在［1］中提出了两个猜想。

定义3 设T是一颗树，如果$\triangle(T)=3$，且T的每个度1的顶点与一个度2的顶点相邻，反之亦然，则称T是一颗1_2_树。

定理B （［1］中定理6.2）如果T是一颗树，且有$\triangle(T)\leqslant 3$，则$P_3(T)$是哈密尔顿图(以后简称H_图）当且仅当T是1_2_树。

最小的1_2_树显然是$S(K_{1,3})$。

猜想1 （［1］中猜想6.3）如果T是树，$\triangle(T)\geqslant 4$，则$P_3(G)$不是H_图。

猜想2 （［1］中猜想6.6）如果G是唯一圈图，$\triangle(G)\geqslant 5$，则$P_3(G)$不是H_图。

下面，我们将证明这两个猜想是对的。

1 树的P_3_图的哈密尔顿性质

在这一节中，我们将给出一棵树T具有哈密尔顿路图$P_3(T)$的充分必要条件。为此，先陈述和证明下面的引理。

引理1 设G是一个图，如果$P_3(G)$是哈密尔顿图，则$\forall v\in V(G)$，若$d_G(v)\geqslant 2$，那么$\forall u$，$m\in N_G(v)$，必有

$$d_G(u)+d_G(m)\geqslant 4.$$

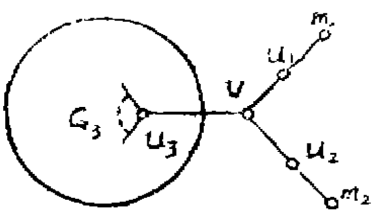
从定理B和引理1立即可得

引理2 若T是一棵树，$P_3(T)$是H_图，则有$T\supset S(K_{1,3})$，从而

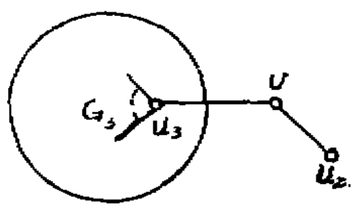
(i) $|T|\geqslant 7$； (ii) $d(T)\geqslant 4$

引理3 设G是一个连通图，v是G的一个割点，$d_G(v)=3$，$w(G-v)=3$。设G_1,G_2,G_3是$G-v$的三个分枝，$N_G(v)=\{u_1, u_2, u_3\}$，$u_i\in V(G_i)$。如果G_1，G_2均同构于K_2，$|G_3|>2$，且$V(G_i)=\{u_i, m_i\}$，$i=1, 2$。则$P_3(G)$是H_图当且仅当$P_3(G-\{m_1, m_2, u_1\})$是H_图。

证明 设$F=G-\{m_1, m_2, u_1\}$，则G和F具有形式如下：



图G



图F

显然，u_3v是图G和图F的一条割边。

设$S=N_G(u_3)\setminus\{v\}=\{s_1, \cdots, s_k\}$，则有$S\subset V(G_3)$。若$k=|S|=1$，根据$|G_3|>2$，知$s_1u_3v$是$G$和$F$的一条桥路，从而$x=s_1u_3v$是$P_3(G)$和$P_3(F)$的一个割点。因此，如果$P_3(G)$或$P_3(F)$有哈密尔顿圈，则必有$k=|S|>2$。

我们用x和y来表示$P_3(G)$或$P_3(F)$中的顶点。

令$x_1=u_3vu_1$，$x_2=vu_1m_1$，$x_3=u_1vu_2$，$x_4=vu_2m_2$，$x_5=u_2vu_3$，$y_i=vu_3s_i$，$i=1$，$\cdots$，k。

那么，$P_3(F)=P_3(G)-\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$。

显然，x_2，x_3，x_4在$P_3(G)$中的度均为2，且$x_ix_{i+1}\in E(P_3(G))$，$i=1, 2, 3, 4$。故$P_3(G)$中的路$P=x_1x_2x_3x_4x_5$是通过顶点x_2，x_3，x_4最短的唯一的一条路，即$P_3(G)$中的任何包含顶点x_2，x_3，x_4作为内部顶点的路P'都包含路P。

设C是$P_3(G)$中的一个哈密尔顿圈，则$P\subset C$。显然，x_1在C上的另一个邻点为y_i，x_5在C上的另一个邻点为y_j，且$i\neq j$。我们令$P^*=C-V(P)$，则P^*是$P_3(G)$中的一条路，两个端点分别为$y_i=vu_3s_i$和$y_j=vu_3s_j$，进一步$P^*\subset P_3(F)$，且$V(P^*)=\Pi_3(F)\setminus\{x_5\}$。令$\widetilde{P}=y_ix_5y_j$，则$\widetilde{P}$是$P_3(F)$中的一条路，且$P^*\cup\widetilde{P}=C^*$是$P_3(F)$中的一个圈，由于$V(C^*)=\Pi_3(F)$，故$C^*$是$P_3(F)$的一个哈密尔顿图。

反之，若C^*是$P_3(F)$的一个哈密尔顿圈，设x_5在C^*上的两个邻点为$y_i=vu_3s_i$和$y_j=vu_3s_j(i\neq j)$，令$\overline{P}=y_ix_1x_2x_3x_4x_5y_j$，则

$$C=\overline{P}\cup(C^*-\{x_5\})$$

是$P_3(G)$的一个哈密尔顿圈。

引理得证。

定理 1　设T是一棵树，则$P_3(T)$是哈密尔顿图当且仅当T是1_2_树。

证明　充分性部分由定理B得到。

下面证明必要性。

设$P_3(T)$是哈密尔顿图，往证T是1_2_树。

我们对$\nu=|T|$进行归纳。引理2告诉我们$\nu\geqslant 7$，且$d(T)\geqslant 4$。若$\nu=7$，显然。设$\nu>7$，假设结论对一切$\nu'<\nu$的ν'阶树成立，考虑ν阶树T。

设m_1，$v''\in V(T)$，$d_T(m_1, v'')=d(T)$，则应有$d_T(m_1)=d_T(v'')=1$。由$d(T)\geqslant 4$，设P是以m_1和v''为端点的路，则$|P|\geqslant 5$。不失一般性，设

$$P=m_1u_1vv'\cdots v''$$

由于$P_3(T)$是H_图及$d_T(m_1)=1$，故必有$d_T(u_1)=2$。若$d_T(u_1)>2$，设$u_1'\in N_T(u_1)\setminus\{m_1, v\}$，根据引理1，$d_T(u_1')\geqslant 4-d_T(m_1)=3$。设$s\in N_T(u_1')\setminus\{u_1\}$，则路$P'=su_1'u_1vv'\cdots v''\subset T$，由$T$是树，$d_T(s, v'')=d_T(u_1', v'')+d_T(s, u_1')=1+d_T(m, v'')>d(T)$矛盾，因此，$d_T(u_1)=2$。

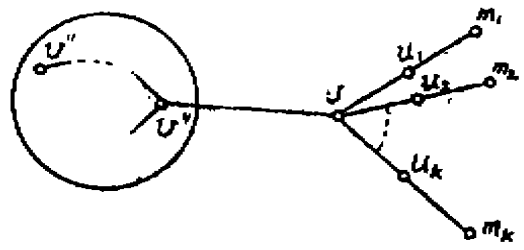
再由引理1，$d_T(v)\geqslant 3$。

设$d_T(v)=k+1$，$N_T(v)\setminus\{v'\}=\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$。由引理1，$d_T(u_i)\geqslant 4-d_T(u_1)=2$，$i=2$，$\cdots$，$k$。

若有某个u_i之度大于2，则有u_i'，$u_i''\in N_T(u_i)$，$u_i'\neq v$，$u_i''\neq v$，从而$d_T(u_i')+d_T(u_i'')\geqslant 4$，必存在一个顶点$s'\in N_T(u_i')\setminus\{u_i\}$，于是$P''=s'u_i'u_i\cdots v''$是$T$中的路，且$|P''|>|P|$，即$d_T(s', v'')>d(T)$，矛盾。所以$\forall\ 2\leqslant i\leqslant k$，$d_T(u_i)=2$。

设m_i是u_i的不同于v的另一个邻点，由于$d_T(m_i, v'')=d(T)$，故$d_T(m_i)=1$。

因此，树T在顶点v附近如右图所示：



树T

我们进一步证明 $k=2$ 即$d_T(v)=3$.

考虑$P_3(T)$的顶点集X和Y：

$X=\{x_i=vu_im_i,\ i=1,\ \cdots,\ k\}$,

$Y=\{y_{ij}=u_ivu_j,\ i,\ j=1,\ \cdots,k,i\neq j\}$.

我们记$G=P_3(T)$，显然$N_G(y_{ij})=\{x_i,x_j\}\subset X$．于是 在$G$-$X$中，每个顶点$y_{ij}$均是孤立点，从而

$$\omega(G-X)\geqslant|Y|+1=\binom{k}{2}+1$$

因为G是哈密尔顿图，按照〔2〕中p.53定理4.2，应有

$$\omega(G-X)\leqslant|X|=k,$$

即

$$\binom{k}{2}+1\leqslant k$$

由于$k\geqslant 2$，得到$k=2$，故$d_T(v)=3$．

令$T_1=T-\{m_1,\ m_2,\ u_1\}$，由引理3，从$P_3(T)$是$H$_图知$P_3(T_1)$也是$H$_图。现在$T_1$仍是树，且$\nu'=|T|<\nu$，根据归纳假设，树$T_1$是1_2_树，显而易见，$T$也是1_2_树。

由归纳法原理，必要性得证。

2 唯一圈图的P_3_图的哈密尔顿性质

定理 2 设G是唯一圈图，如果$P_3(G)$是哈密尔顿图，则$\triangle(G)\leqslant 4$．

证明 设$v\in V(G)$，$d_G(v)=\triangle(G)=\triangle$，$C$是图$G$的唯一的圈。

a) $v\overline{\in}V(C)$

设v_0是C上距v最近的一个顶点，子图G_1是$G-v_0$的包含顶点v的分枝，则$T=G_1+v_0$是一棵树，且$\forall v'\in V(G_1)$,$d_T(v')=d_G(v')$．设v的邻点是u_1，$\cdots$，$u_{\triangle-1}$，$u_\triangle$,由$v\overline{\in}V(C)$，故$\triangle\geqslant d_G(v_0)\geqslant 3$．假设$u_\triangle$在$(v_0,\ v)$路上。考虑顶点$u_1$，$\cdots$，$u_{\triangle-1}$．若有某个$i$使$d_T(u_i)\geqslant 3$，设$u'$是距$u_i$最远的一个度1的顶点，且$(u_i,\ u')$路不经过$v$．由$d_T(u_i)\geqslant 3$和$P_3(G)$是$H$_图，必有$d_T(u_i,\ u')=d_G(u_i,\ u')\geqslant 2$．设$P'$是从$u_i$到$u'$的路，即

$$P'=u_i\cdots u^0m_1u'$$

因为$P_3(G)$是H_图，以及$d_G(u_i,\ u')$的极大性，类似于定理1，可以证明$d_G(u^0)=3$，设m_2是u^0的不在路P'上的另一个邻点，则$d_G(m_2)=2$．若$u''\in N_G(m_2)\setminus\{u^0\}$，那么，$d_G(u'')=1$．现在令$G_1=G-\{u',\ u'',\ m_2\}$，根据引理3，$P_3(G_1)$与$P_3(G)$具有相同的哈密尔顿性质，并且在$G_1$中，$d_{G_1}(u_i,\ m_1)<d_G(u_i,\ u')$．所以反复使用这个递减顶点的过程，可以得到$G$的一个子图$G^*$，使$d_{G^*}(u_i)=2$，在$G^*$中，$u_i$的不同于$v$的另一个邻点$s$具有度1，并且$P_3(G)$是$H$_图当且仅当$P_3(G^*)$是$H$_图。

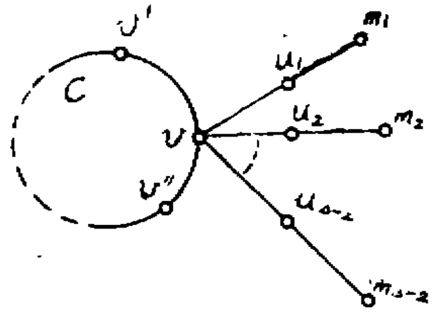
因此，不失一般性，我们可以假设对所有的$i=1,\ 2,\ \cdots,\ \triangle-1$，$d_G(u_i)\leqslant 2$．由

$P_3(G)$是H-图，按照引理1，$d_G(u_i)=2$，对每个i（$1\leqslant i\leqslant\Delta-1$）成立。设$m_i\in N_G(u_i)\setminus\{v\}$，因为$P_3(G)$无割点，故$G$不包含桥路，故$d_G(m_i)=1$，$i=1,\cdots,\Delta-1$。从而，根据定理1的证明中最后一部分的同样理由，我们得到$d_G(v)=\Delta=3$，即$\Delta\leqslant 4$。

b) $v\in V(C)$

若$\Delta=2$，即$G=C$，显然。

以下设$\Delta\geqslant 3$。



设v在C上的两个邻点是v'和v''，其余的邻点是$u_1,\cdots,u_{\Delta-2}$。根据前面a)的证明中的同样理由，我们可以假定$d_G(u_i)\leqslant 2$，$i=1,\cdots,\Delta-2$，而不会失去普遍性。若有某个u_i的度为1，那么由$P_3(G)$是H-图和引理1，必有$\Delta=3<4$，证明结束。否则$\forall i$，$d_G(u_i)=2$。

设$m_i\in N_G(u_i)\setminus\{v\}$，由$G$不包含桥路，$d_G(m_i)=1$，于是在顶点$v$处图$G$如上图所示：

令$S=\{vu_im_i;\ i=1,\cdots,\Delta-2\}$，则有$S\subset\Pi_3(G)$，且$S$为非空。因为$u_ivu_j$在路图$P_3(G)$中的邻集含于$S$之中，而$P_3(G)$有哈密尔顿圈，故

$$\Delta-2=|S|\geqslant\omega(P_3(G)-S)\geqslant 1+\binom{\Delta-2}{2},$$

由此即得 $\Delta\leqslant 4$

定理证毕。

附注　我们在证明中说：“不失一般性，假设$d_G(u_i)\leqslant 2$，…”，严格地说，应是“我们可以通过递减顶点的过程得到图G的一个子图F，使$d_F(u_i)\leqslant 2$，…，且$P_3(G)$与$P_3(F)$有相同的哈密尔顿性质。”

推论1　若G是唯一圈图，$\Delta(G)\geqslant 5$，则$P_3(G)$不是哈密尔顿图。

最后，我们指出，从[1]中关于唯一圈图G的结果和我们的讨论，是能够得到唯一圈图G的路图$P_3(G)$有哈密尔顿圈的充分必要条件的，然而，分析将是冗长和琐碎的。在本文中我们不再作讨论。

参考文献

1　H.J.Broerrma and C.Hoeda, Path Graphs. Journal of Graph Theory, Vol.13, No.4, Sept.(1989) 427-444

2　J.A.Bondy and U.S.R.Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan(1976)

（编辑：刘家凯）

THE HAMILTON CYCLES OF A CLASS OF PATH GRAPHS

Zhang Jiangao
(Dept. of Construction Management)

ABSTRACT Let G be a graph, it is denoted by $\Pi_k(G)$, the set of all paths of G is on k vertices($k \geqslant 1$). The path graph $P_k(G)$ of a graph G has vertex set $\Pi_k(G)$ and edges joining pairs of vertices that represent two paths P_k, the union of which forms either a path P_{k+1} or a cycle C_k in G. H.J.Broersma and C.Hoeda dealt with the properties of the path graph,and they suggested two conjectures:1) If T is a tree with $\triangle(T) \geqslant 4$, then $P_3(T)$ is not hamiltonian; 2)If G is a unicyclic graph with $\triangle(G) \geqslant 5$, then $P_3(G)$ is not hamiltonian. In this paper, these two conjectures proved are true.

KEY WORDS Hamiltonian, path graph, 1_2_tree