

## 积分方程在压杆稳定中的应用\*

陈 春

(建筑工程系)

**摘 要** 本文针对材料力学中压杆失稳临界力的确定, 引用了积分方程并加以讨论, 从而使对该问题的研究方法进一步提高。

**关键词** 积分方程, 压杆稳定, 特征值

在材料力学中, 有关压杆失稳临界力的确定方法很多, 但有些问题(如变截面压杆)如果引入积分方程的运算, 临界力的确定就较文[3]中的方法(解 Bessel 方程)更为直接明了。

### 1 由影响线概念建立压杆稳定积分方程

由梁的挠曲线影响线概念, 在无轴向力作用时, 梁轴任一点的挠度可表示为

$$y(x) = \int_0^l K(x, t)q(t)dt \quad (1)$$

式中  $l$ ——梁(或杆)的长度,  $q(t)$ ——梁(或杆)的横向荷载集度,  $y(x)$ ——梁(或杆)的某点挠度,  $K(x, t)$ ——单位力作用在坐标为  $t$  的点所引起坐标为  $x$  点的挠度。

由位移互等定理:  $K(x, t) = K(t, x)$  (2)

故(1)为梁在坐标为  $x$  截面的挠度影响线。

如果把梁改为受到轴向压力  $P$  作用的压杆, 则由挠曲线近似微分方程得:

$$EIy''(x) = M(x) = -Py(x) \quad (3)$$

式中  $EI$ ——抗弯刚度,  $M(x)$ ——压杆任意截面弯矩

把(3)微分两次得:

$$EIy''''(x) = q(x) = -Py''(x) \quad (4)$$

把(4)中  $x$  换成  $t$  得:

本文1990年12月17日收到。

\* 自然科学基金资助课题。

$$q(t) = -Py''(t) \quad (5)$$

把(5)中的 $q(t)$ 比拟为压杆作为梁所受到的一个横向荷载。将(5)代入(1)得:

$$y(x) + P \int_0^l K(x,t)y''(t)dt = 0 \quad (6)$$

又因在轴向力 $P$ 的作用下,压杆两端的横向剪力为: $Q_A = -Py'(0)$ ,  $Q_B = -Py'(l)$   
 $Q_A, Q_B$ 引起的挠度为:

$$y_1(x) = -Q_A K(x,0) + Q_B K(x,l) = P[K(x,0)y'(0) - K(x,l)y'(l)] \quad (7)$$

把(7)加到(6)即得符合任意边界条件的压杆挠度积分方程:

$$y(x) + P \int_0^l K(x,t)y''(t)dt + P[K(x,0)y'(0) - K(x,l)y'(l)] = 0 \quad (8)$$

对(8)进行一次分部积分得:

$$y(x) = P \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} K(x,t)y'(t)dt$$

再对 $x$ 微分一次得

$$y'(x) = P \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} K(x,t)y'(t)dt \quad (9)$$

$$\text{令} \quad \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} K(x,t) = T(x,t) \quad (10)$$

由位移互等定理 $T(x,t) = T(t,x)$

最后(9)成为

$$y'(x) = P \int_0^l T(x,t)y'(t)dt \quad (11)$$

方程(11)即为压杆稳定的积分方程。它是以 $T(x,t)$ 为对称核且关于函数 $y'(x)$ 的第二种 Fredholm 积分方程。它是

当 $P$ 非零时可确定作为方程(11)的特征值 $P_n$ ,其最小特征值 $P_1$ 即为压杆的临界力,即 $P_{11} = P_1$ 。

## 2 由基本微分方程建立压杆稳定积分方程

对于图1所示压杆,其边界条件为

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (12)$$

假设压杆为变截面,则抗弯刚度为 $EI(x)$ , $E$ ——压杆弹性模量, $I(x)$ ——压杆在横坐标 $x$ 处的截面惯性矩。

则压杆挠曲线 $y = y(x)$ 满足微分方程:

$$\frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{dy}{dx} \right] = M(x) \quad (13)$$

式中

$$M(x) = -Py(x) \quad (14)$$

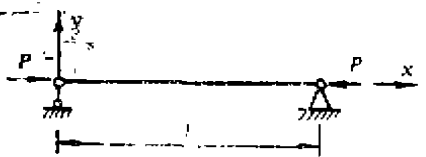


图1

$P$ ——压杆的轴向压力。

把 (14) 代入 (13) 得变截面压杆的挠曲线方程

$$\frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{dy}{dx} \right] + Py(x) = 0 \quad (15)$$

记  $\lambda = \frac{P}{E}$ , 引入边界条件 (12) 将 (15) 化为压杆稳定积分方程

$$y(x) = \lambda \int_0^l G(x,t) y(t) dt \quad (16)$$

式中积分核  $G(x,t)$  为 Green 函数。其表达式由具体问题参照文<sup>[10]</sup>加以确定。

(16) 就是等价于 (12) 和 (15) 的第二类 Fredholm 积分方程。

在 (16) 中  $\lambda$  为非零特征值, 当  $P_n = \lambda_n E$  在  $\lambda_n$  取最小特征值  $\lambda_1$  时,  $P$  即为压杆的临界力。

$$P_{11} = P_1 = \lambda_1 E \quad (17)$$

由 Hilbert—Schmidt 定理

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}, \quad A_2 = \int_0^l \int_0^l G^2(x,t) dx dt \quad (18)$$

当  $EI(x) = EI = \text{常量}$ , 即为等直压杆, 其压杆稳定积分方程仍为 (16), 只是式中  $\lambda = \frac{P}{EI}$ , 且

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{t(l-x)}{l} & (0 \leq t \leq x) \\ \frac{x(l-t)}{l} & (x \leq t \leq l) \end{cases} \quad (19)$$

### 3 算例

现在我们考虑一个对应于边界条件 (12) 的矩形变截面压杆的临界力问题。以  $b_0$  和  $b_0(1+j)$  (常数  $j > 0$ ) 为压杆两端截面宽度,  $h$  为杆截面厚度, 如图 2。于是在横坐标  $x$

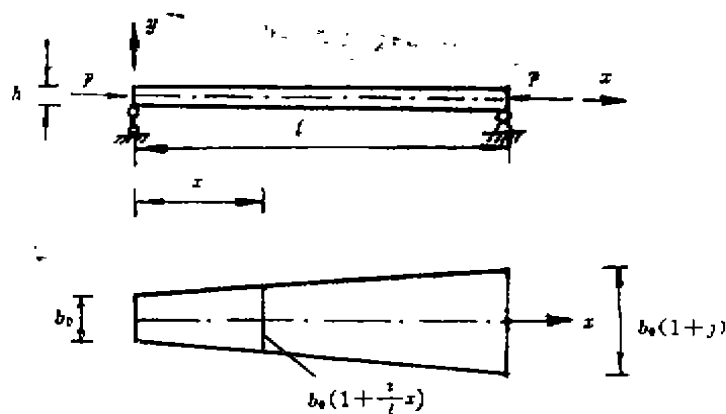


图 2

处, 压杆截面宽度为  $b_0 \left(1 + \frac{jx}{l}\right)$ , 该截面惯性矩为

$$I(x) = \frac{b(x)h^3}{12} = \frac{b_0 h^3}{12} (1 + \alpha x) = I_0 (1 + \alpha x)$$

式中  $I_0 = \frac{b_0 h^3}{12}$  为  $x = 0$  处截面惯性矩,  $\alpha = j/l$

则 (16) 变为

$$y(x) = \mu \int_0^l G(x, t) y(t) dt \quad (20)$$

式中  $\mu = \lambda/I_0$ ,  $\lambda = P/E$

参照文[6]确定Green函数  $G(x, t)$  为

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{C} \ln(1 + \alpha x) \ln \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha l} & (0 \leq x \leq t) \\ \frac{1}{C} \ln(1 + \alpha t) \ln \frac{1 + \alpha x}{1 + \alpha l} & (t \leq x \leq l) \end{cases} \quad (21)$$

式中  $C = \alpha \ln(1 + \alpha l)$ .

最后确定临界力就归结为求积分方程 (20) 的最小特征值  $\mu_1$ .

$$\text{由 (18) 得} \quad \frac{1}{\mu_1^2} \approx \int_0^l \int_0^l G^2(x, t) dx dt \quad (22)$$

把 (21) 代入 (22) 并约去  $\alpha$  (即  $j$ ) 的高次幂可得

$$\frac{1}{\mu_1^2} \approx l^4 \left( \frac{1}{90} - \frac{2j}{45} \right)$$

也可将 (22) 编制计算机程序, 进行电算处理。

又因  $\lambda = I_0 \mu = P/E$ , 而  $I_0 = \frac{b_0 h^3}{12}$

由 (17) 所得所求临界力的近似公式

$$P_{1j} = P_1 = E \lambda_1 = E I_0 \mu_1 = \frac{\sqrt{90} E I_0}{l^2} (1 + 2j) = \frac{9.487 E I_0}{l^2} (1 + 2j)$$

若设  $j = 0$ , 即为等直压杆, 其所求临界力近似值为

$$P_{1j} = \frac{9.487 E I_0}{l^2}$$

它比用欧拉公式所得的准确值

$$P_{1j} = \frac{\pi^2 E I_0}{l^2} = \frac{9.897 E I_0}{l^2}$$

要小 5%, 其精度符合要求。

## 4 误差分析

积分方程(20)式可用各种近似方法求解。本文所采用的是积分方程理论中的Hilbert—Schmidt定理。该方法是一种近似法，它用核迹线求最小特征值得到的临界力是准确值的下限（式(22)中的 $\frac{1}{\mu_1^2}$ 称为第二核迹线）。由于这种方法将临界力（特征值）的确定与失稳形式（特征函数）的建立分开考虑，而通常采用的方法<sup>[1][2][3]</sup>对这两者是同时考虑的，故而，按(22)求得的临界荷载近似值总是低于精确值。

## 5 结 语

本文所建立的积分方程是线性齐次的，它适用于细长压杆小挠度失稳的情况。若采用变形曲线曲率的精确表达式<sup>[9]</sup>，则得到的积分方程是非线性的。

用本文所述的方法确定算例中压杆的临界力，避免了解Bessel方程以及可能出现的复杂超越方程。对于确定其它较复杂情形下的细长受压杆临界力问题，如在自重作用下或阶梯形变截面压杆等，采用该方法也可显示出某种优越性。

感谢汪礼顺教授对本文的指导。

### 参 考 文 献

- 1 孙训方，方孝淑，关宏泰，材料力学，第二版，高等教育出版社，1987
- 2 黎绍敏，稳定理论，哈尔滨建筑工程学院讲义，1983
- 3 刘鸿文，高等材料力学，高等教育出版社，1985
- 4 陈传璋，侯宗义，李明忠，积分方程论及其应用，上海科学技术出版社，1987
- 5 姚家宁，积分方程，重庆大学出版社，1986
- 6 《数学手册》编写组，数学手册，人民教育出版社，1979

(编辑：徐维森)

## APPLICATION OF INTEGRAL EQUATION TO THE STABILITY OF COMPRESSION BARS

Chen Chun

(Department of Civil Engineering)

**ABSTRACT** This paper proposes integral equation to find the critical buckling load of compression bars in mechanics of materials, thus the research method of this problem has been improved.

**KEY WORDS** integral equation, stability of compression bars, characteristic