

半刚性连接钢框架 $M-\theta$ 曲线的自适应函数法

陈 林 崔 佳 吴惠弼

(机电系) (建筑工程系)

摘 要 半刚性连接钢框架设计中, 确定节点的弯矩 M —转角 θ 关系往往是一件较困难的事。目前采用的方法多以已知实验数据为基础, 在假定函数形式的基础上拟合出一个经验公式。由于对各种不同的 $M-\theta$ 曲线采用了固定不变的函数模型, 造成拟合曲线或者达不到要求的设计精度, 或者项数过多, 这些都给实际运用带来了不便。本文采用一种具有自适应能力的函数模型, 根据具体问题确定函数形式, 既避免了公式项数过多、过繁, 又能达到设计所要求的计算精度。所得 $M-\theta$ 曲线形式简洁, 使用方便, 对于半刚性连接钢框架的设计具有较高的实用价值。

关键词 钢框架, 半刚性连接, 弯矩转角关系, 自适应函数

传统的钢框架设计通常视梁与柱的连接节点为理想的铰接或完全刚接。前者假定节点不能传递弯矩, 但能够自由转动; 后者假定当框架受载变形后, 两相邻杆件间的夹角保持不变。采用这两种理想的节点模型尽管能够使计算得到简化, 却不能真实地反映实际结构的受力性能。特别是随着高强度螺栓在钢框架节点连接中的普遍使用, 研究介于理想铰接和刚接之间的半刚性连接框架的受力性能就显得更为重要。

若略去剪力和轴力对节点变形的微小影响, 连接处的刚度将主要取决于节点弯矩 M 与相邻梁柱间相对转角 θ 之间的关系。由于实际工程中连接形式的多样性和复杂性, 很难从理论上得出 $M-\theta$ 关系的一般表达式, 因而目前世界各国对半刚性节点性能的研究多以实验数据为基础, 即先假定出 $M-\theta$ 曲线的模型函数, 再由已知实验数据确定模型函数中的待定参数。较具代表性的如 Frye 和 Morris 在 1975 年提出的以多项式为模型的 $M-\theta$ 曲线, 采用最小二乘法来确定多项式的常数。该方法除拟合曲线的计算精度较差以外, 最大的缺点是函数的一阶导数不连续, 有时甚至会出现负数的情况。由于一阶导数所代表的是连接点的刚度, 因而在物理意义上是不可能的。为解决这些矛盾, Jones et al 建议采用一个三次 B 样条函数模型。尽管该方法解决了多项式拟合的缺陷, 但由于函数模型的项数较多, 且要想达到较高的精度, 需要大量的实验点。此外, 该方法是分段表达的, 函数形式不直观, 使用起来也不太方便。

本文1991年6月22日收到。

本课题得到高等学校科学技术基金资助。

1985年, Chen-Lui提出用以 e 为底的指数函数模型来表达 $M-\theta$ 曲线。为了描述连接节点在发生应变硬化后的 $M-\theta$ 关系, N. Kishi, W. F. Chen 又在此基础上增加了一些线性项用以对函数进行修改, 以使模型函数能够较精确地描述 $M-\theta$ 关系曲线在应变硬化阶段所具有的线性特征。该方法的计算精度很高, 且对曲线的硬化段有较好的适应性。缺点是分段表达, 且由于函数模型的选择是固定不变的, 为了提高拟合的精度, 只得增加模型的项数。因而在具体拟合时至少取了 6 项, 一般在 7, 8 项, 最多的甚至取到了 14 项。这就给使用带来了不便, 特别是当已知弯矩 M 需要反求转角 θ 时, 更增加了困难的程度。

综上所述, 过去的方法都是先假定函数模型, 然后采用数值方法求出待定参数。显然, 函数模型的选取是否正确就直接决定了 $M-\theta$ 曲线的拟合精度。针对这一点, 本文采用了一种具有自适应能力的拟合函数模型, 其优点在于可以根据具体的实验数据来确定函数模型的形式, 使得经选择后的模型具有最佳的逼近效果。

1 基本原理

实际工程中的钢框架结构, 由于节点连接方法、相邻梁柱的尺寸以及连接构造等的千差万别, 其 $M-\theta$ 曲线也是各不相同的。若以同一组固定不变的函数模型去拟合这些不同的曲线, 势必造成对某些曲线的不适应以至于必需借助增加函数的项数来提高拟合曲线的精度。显然, 如果能事先根据具体问题对拟合函数的形式进行合理地选择, 则可以大大地提高它的拟合精度。自适应函数方法的基本思想就是首先根据已知实验点确定出一个代表拟合函数的常微分方程, 通过求解此微分方程便可得到拟合函数的具体形式。

对于给定的一组实验数据 $\{\theta_i\}$ 和函数值 $\{M_i\}$ (其中 $i=1, 2, 3, \dots, m$), 假设实际问题中的待求函数 $M(\theta)$ 满足微分方程

$$M^{(n)} + a_1(\theta)M^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(\theta)M' + a_n M = f(\theta)$$

(其中 $n \ll m$), 为了求解的方便, 不妨设 $a_i(\theta)$ 恒为常数 (即待定常数 a_i), 并设 $f(\theta) \equiv 0$ 。上式成为:

$$M^{(n)} + a_1 M^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} M' + a_n M = 0 \quad (1)$$

由于已知实验点满足微分方程(1), 因而根据这组实验点的对应值 $\{\theta_i\}$ 和 $\{M_i\}$, 通过最小二乘的方法可将(1)式的待定常数 $\{a_i\}$ 唯一地确定下来。与(1)式相应的特征方程为:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2)$$

求解此特征方程可得到一组特征根。假设该方程有 n 个互不相同的实根

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$$

于是得到弯矩 $M(\theta)$ 的一个基本解组

$$\{e^{\lambda_1 \theta}, e^{\lambda_2 \theta}, e^{\lambda_3 \theta}, \dots, e^{\lambda_n \theta}\}$$

即拟合曲线 $M(\theta)$ 可表示为

$$M(\theta) = C_1 e^{\lambda_1 \theta} + C_2 e^{\lambda_2 \theta} + \dots + C_n e^{\lambda_n \theta} \quad (3)$$

这种以具体问题建立常微分方程, 又通过反解该常微分方程来确定拟合函数的方法, 避免了假设函数模型对某些曲线的不适应性, 因而具有非常好的拟合精度。

2 $M(\theta)$ 函数形式的确定

假设对某一特定连接点, 其 $M-\theta$ 曲线由已知的一组实验数据 $\{\theta_i\}$ 和 $\{M_i\}$ ($i=1, 2, \dots, m$) 所描述, 设该组实验点代表的函数 $M(\theta)$ 满足方程

$$M''(\theta) + \beta M'(\theta) + \gamma M(\theta) + C = 0 \quad (4)$$

或
$$M''(\theta) + \beta M''(\theta) + \gamma M(\theta) = 0 \quad (5)$$

式中 β 、 γ 、 C 都为待定常数。为确定 β 和 γ 的值, 首先将方程(4)离散化。这里为了提高计算精度, 近似函数采用了三次B样条函数 $S_3(\theta)$ 。

令 $S_3''(\theta_i) = M''(\theta_i) = M_i''$, $S_3'(\theta_i) = M'(\theta_i) = M_i'$, $S_3(\theta_i) = M(\theta_i) = M_i$ (4) 式成为:

$$M_i'' + \beta M_i' + \gamma M_i + C = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

或
$$M_i'' = -\beta M_i' - \gamma M_i - C \quad (6)$$

由样条函数的三弯矩方程

$$\mu_i M_{i-1}'' + 2M_i'' + \lambda_i M_{i+1}'' = d_i \quad (7)$$

式中 $\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$

$$\lambda_i = 1 - \mu_i$$

$$h_i = \theta_{i+1} - \theta_i$$

$$d_i = 6 \left\{ \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{h_{i-1}} \right\} / (h_{i-1} + h_i)$$

将(6)式代入(7)式得

$$-\beta(\mu_i M_{i-1}' + 2M_i' + \lambda_i M_{i+1}') - \gamma(\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1}) - C(\mu_i + 2 + \lambda_i) = d_i \quad (8)$$

令
$$a_i = \mu_i M_{i-1}' + 2M_i' + \lambda_i M_{i+1}'$$

$$= 3 \left(\lambda_i \frac{M_i - M_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i} \right) + (\mu_i - \lambda_i) \left(\frac{M_i - M_{i-2}}{\theta_i - \theta_{i-2}} - \frac{M_{i+2} - M_i}{\theta_{i+2} - \theta_i} \right)$$

$$b_i = \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1}$$

$$i = 3, 4, \dots, m-2$$

于是(8)式可化简为

$$-a_i \beta - b_i \gamma - 3C = d_i \quad (i=3, 4, \dots, m)$$

利用最小二乘法, 首先令

$$I(\beta, \gamma, C) = \sum_{i=3}^{m-2} \{a_i \beta + b_i \gamma + 3C - d_i\}^2 = \min$$

则可分别对 β 、 γ 和 C 求偏导数, 得到以下线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial \beta} = \beta \sum_{i=3}^{m-2} a_i^2 + \gamma \sum_{i=3}^{m-2} a_i b_i + C \sum_{i=3}^{m-2} 3a_i - \sum_{i=3}^{m-2} d_i a_i = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \gamma} = \beta \sum_{i=3}^{m-2} a_i b_i + \gamma \sum_{i=3}^{m-2} b_i^2 + C \sum_{i=3}^{m-2} 3b_i - \sum_{i=3}^{m-2} d_i b_i = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial C} = \beta \sum_{i=3}^{m-2} 3a_i + \gamma \sum_{i=3}^{m-2} 3b_i + C \sum_{i=3}^{m-2} 3^2 - \sum_{i=3}^{m-2} 3d_i = 0 \end{cases}$$

求解以上方程组, 便可唯一地确定 β 、 γ 和 C 的值。因而可得到相应于(1)式的特征方程

$$\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda = 0 \quad (9)$$

解此特征方程, 可求得相应的特征根

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

$$\lambda_3 = 0$$

若令 $S = \beta^2 - 4\gamma$, 则由此特征根所定义的函数形式为:

$$M(\theta) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 \theta} + C_2 e^{\lambda_2 \theta} + C_3 & (S > 0) \\ e^{u\theta} (C_1 \cos V\theta + C_2 \sin V\theta) + C_3 & (S < 0) \\ C_1 e^{\lambda_1 \theta} + C_2 \theta e^{\lambda_2 \theta} + C_3 & (S = 0) \end{cases} \quad (10)$$

式中, C_1, C_2, C_3 为待定常数, $S < 0$ 为特征方程有复根的情况, 此时 $\lambda_{1,2} = \mu \pm iV$, 其中 u, V 分别为特征根的实部和虚部。

考虑初始条件, 当 $\theta = 0$ 时, 有 $M(\theta) = 0$, 上式成为

$$M(\theta) = \begin{cases} C_1(1 - e^{\lambda_1 \theta}) + C_2(1 - e^{\lambda_2 \theta}) & (S > 0) \\ C_1(1 - e^{u\theta} \cos V\theta) + C_2 e^{u\theta} \sin V\theta & (S < 0) \\ C_1(1 - e^{\lambda_1 \theta}) + C_2 \theta e^{\lambda_2 \theta} & (S = 0) \end{cases} \quad (11)$$

上式亦可简写为

$$M(\theta) = C_1 \varphi_1(\theta) + C_2 \varphi_2(\theta) + m_0 \quad (12)$$

式中 m_0 为初始弯矩。

3 最小二乘法求待定常数C

经上述方法选定了拟合函数 $M(\theta)$ 的形式后, 便可对于给定的实验点 $\{\theta_i\}$ 和 $\{M_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 利用最小二乘法确定(10)式中的待定常数 C_1 和 C_2 。

$$\text{令 } I(C_1, C_2) = \sum_{i=1}^m \{C_1 \varphi_1(\theta_i) + C_2 \varphi_2(\theta_i) - (M_i - m_0)\}^2 = \min$$

对 I 求 C_1, C_2 的偏导数得

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial C_1} = C_1 \sum_{i=1}^m \varphi_1^2(\theta_i) + C_2 \sum_{i=1}^m \varphi_1(\theta_i)\varphi_2(\theta_i) - \sum_{i=1}^m (M_i - m_0)\varphi_1(\theta_i) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial C_2} = C_1 \sum_{i=1}^m \varphi_1(\theta_i)\varphi_2(\theta_i) + C_2 \sum_{i=1}^m \varphi_2^2(\theta_i) - \sum_{i=1}^m (M_i - m_0)\varphi_2(\theta_i) = 0 \end{cases}$$

求解以上方程组，可确定 C_1 和 C_2 。代回式 (12)，即得出对应于已知实验数据的弯矩-转角关系曲线 $M(\theta)$ 。

4 M- θ 曲线

综上所述，根据本文所建议的方法，连接处的 $M-\theta$ 曲线具有 (11) 式的形式。实际问题中， $S=0$ 的情况一般不存在，另外，为提高拟合曲线的精度，对 $S>0$ 的情况，我们又增加了两个修正项 $C_3(1-e^{-\frac{\lambda_1}{2}\theta})$ 和 $C_4(1-e^{-\frac{\lambda_2}{2}\theta})$ 。因此，最后得到的 $M-\theta$ 曲线采用了下面的形式：

$$M(\theta) = C_1(1-e^{-\lambda_1\theta}) + C_2(1-e^{-\lambda_2\theta}) + C_3(1-e^{-\frac{\lambda_1}{2}\theta}) + C_4(1-e^{-\frac{\lambda_2}{2}\theta}) \quad (S>0) \quad (13)$$

或

$$M(\theta) = C_1(1-e^{u\theta}\cos V\theta) + C_2e^{u\theta}\sin V\theta \quad (S<0) \quad (14)$$

图 1—图 3 和表 1—表 3 将 (13) 式和 (14) 式所得计算结果与 N. Kishi-W. F. Chen 修改

表 1 腹板单侧角钢连接 (试件 I-2)

$n = -0.0244$, $v = 0.0397$, $S < 0$, $C_1 = 13.9619$, $C_2 = 10.2976$

转 角 (1/1000弧度)	弯矩(千磅-英寸)			连接刚度(千磅-英寸×1000)	
	实验值	指数函数	(14)式	指数函数	(14)式
0.00	0.0	0.0	0.00	-0.7311	0.7486
1.28	0.9	1.0	0.95	0.9868	0.7395
3.10	2.1	2.1	2.28	0.4868	0.7233
4.85	3.4	3.3	3.53	0.8396	0.7043
6.60	4.8	4.9	4.74	0.9275	0.6824
8.33	6.2	6.3	5.90	0.7475	0.6582
10.03	7.4	7.4	7.00	0.5387	0.6323
12.05	8.6	8.4	8.24	0.4867	0.5994
14.48	9.6	9.5	9.65	0.4535	0.5572
17.10	10.6	10.7	11.05	0.4812	0.5095
19.52	11.8	11.9	12.23	0.4933	0.4642
21.63	13.0	13.0	13.16	0.4770	0.4242
24.20	14.3	14.1	14.20	0.4298	0.3756
26.77	15.2	15.2	15.10	0.3680	0.3277
28.87	15.5	15.9	15.75	0.3163	0.2895
31.50	17.0	16.6	16.44	0.2581	0.2431

了的指数函数连接模型以及实验数据进行了比较。其中图 1 和表 1 为采用腹板单侧角钢连接的情况，图 2 和表 2 为腹板双侧角钢连接的节点，图 3 和表 3 为腹板双侧角钢加上下翼缘角

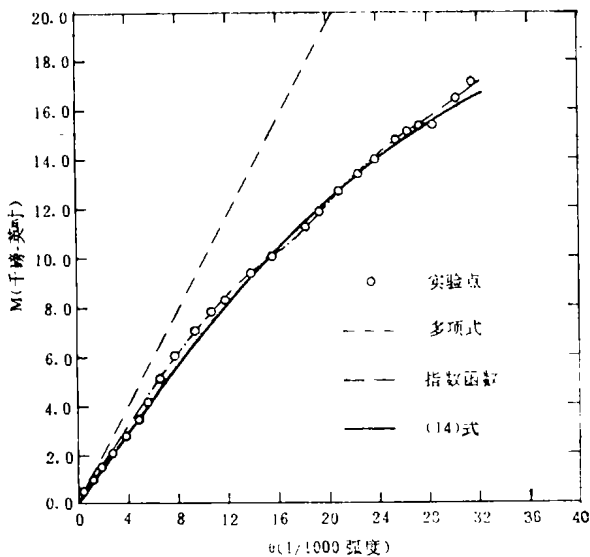


图 1 腹板单侧角钢连接 (试件 I—2)

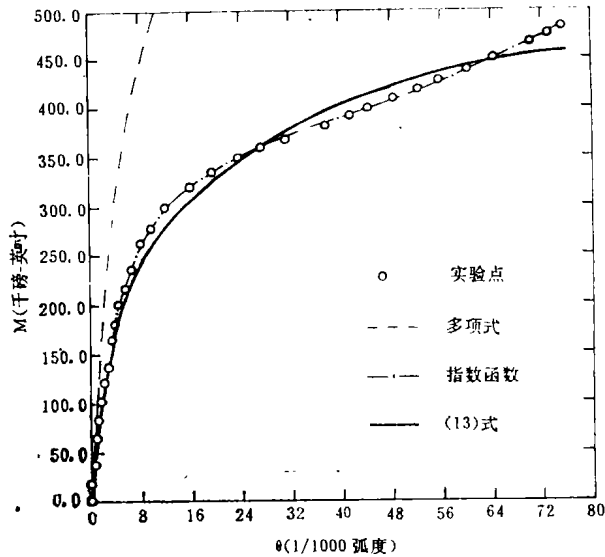


图 2 腹板双侧角钢连接 (试件 II—13)

表 2 腹板双侧角钢连接 (试件 II—13)

$$\lambda_1 = -0.7648, \lambda_2 = -0.6275, S > 0, C_1 = -249.2420, C_2 = -64.3181, \\ C_3 = +46.4215, C_4 = +342.3047$$

转 角 (1/1000弧度)	弯矩(千磅—英寸)			连接刚度(千磅—英寸×1000)	
	实验值	指数函数	(13)式	指数函数	(13)式
0.00	0.0	0.0	0.0	82.75	65.625
0.46	39.7	34.4	29.31	66.80	61.661
1.23	78.9	78.7	73.83	50.59	53.845
2.19	120.7	121.3	120.71	39.22	43.918
3.30	160.9	160.2	163.66	31.18	33.790
4.66	200.7	197.6	202.71	24.13	24.140
6.82	241.1	240.4	243.23	15.99	14.359
10.33	282.6	281.8	279.15	8.608	7.376
16.64	321.3	318.7	313.93	3.999	4.578
23.04	348.0	348.7	341.53	3.578	4.116
29.48	369.0	369.1	366.83	2.925	3.726
35.96	384.5	385.8	389.45	2.342	3.244
42.44	399.9	400.5	408.83	2.268	2.740
49.07	416.4	415.9	425.36	2.376	2.255
55.71	432.9	432.1	438.88	2.501	1.827
62.04	448.7	448.2	449.31	2.588	1.480
68.05	463.9	464.0	457.35	2.641	1.203
74.07	479.1	480.0	463.87	2.672	0.973

表 3 腹板双侧角钢加翼缘上下角钢的连接 (试件 III-8)

$\lambda_1 = 0.7177, \lambda_2 = -0.1832, S > 0$
 $C_1 = +17.0268, C_2 = +437.7526, C_3 = -149.9814, C_4 = -205.6942$

转 角 (1/1000弧度)	弯矩(千磅-英寸)			连接刚度(千磅-英寸×1000)	
	实验值	指数函数	(13)式	指数函数	(13)式
0.00	0.0	0.0	0.00	57.29	65.522
0.47	29.3	28.4	29.42	61.63	59.748
0.97	57.7	58.9	57.87	58.94	54.167
1.38	82.9	82.1	79.21	54.38	49.986
1.92	108.4	109.3	104.83	47.51	44.978
2.42	133.3	131.6	126.26	41.26	40.800
3.52	169.2	170.6	166.67	30.24	32.967
5.06	207.7	209.2	210.64	21.02	24.580
7.10	246.8	245.6	252.40	15.38	16.916
10.09	286.5	285.4	292.09	11.69	10.360
13.70	321.2	321.6	321.86	8.375	6.678
17.22	344.8	345.9	342.54	5.525	5.307
19.42	357.4	356.4	353.82	4.084	4.984
23.00	375.7	373.2	371.28	5.362	4.812
25.77	386.1	386.7	384.52	4.405	4.738
29.35	399.9	401.5	401.09	3.798	4.476
31.67	409.1	410.0	411.09	3.522	4.113
33.76	417.1	417.1	419.19	3.353	3.602
36.17	424.5	425.0	426.90	3.223	2.743
39.47	438.1	435.5	433.24	3.116	0.993

钢连接的节点。实验数据取自 N. Kishi-W. F. Chen 的“钢梁柱连接数据库 (1986)”。本文保留了原资料中的英制单位, 其换算关系为 1 千磅-英寸等于 0.114kN-m。

5 结论

随着在钢框架设计中越来越多地采用半刚性连接的节点模型, 研究人员和设计者都需要有一个既精确、形式又比较简洁的函数模型去描述节点弯矩与转角的关系。本文所建议的方法, 由于节点的连接函数模型由具体问题确定, 因而与目前世界上采用较多的多项式函数

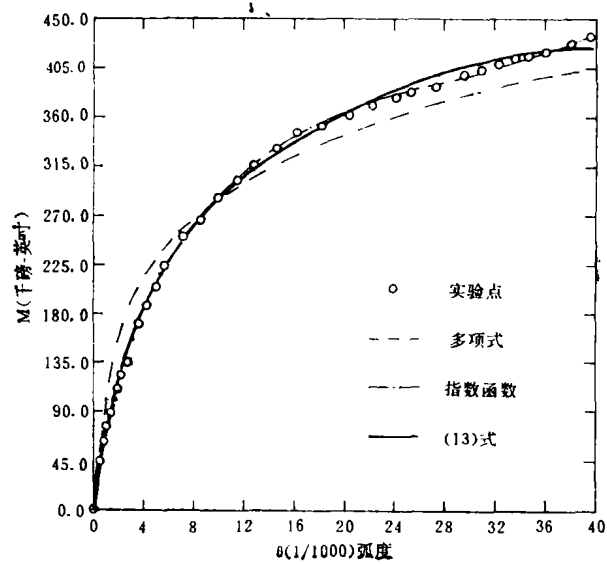


图 3 腹板双侧角钢加翼缘上下角钢的连接(试件 III-8)

模型和指数函数模型比较,一来克服了多项式精度较差,一阶导数不连续的缺点,二来弥补了指数函数取项太多且函数分段表达的不足。通过上节对3种不同连接形式的实验数据所进行的自适应拟合也可以看出,该方法具有较好的精度,对于不同连接形式下的硬化段能得到较满意的结果,各点的连接刚度值也较精确。本文所推荐的 $M-\theta$ 曲线关系式(13), (14)解析、连续,项数较少(最多为四项),且形式统一,对于任意一种连接情况,只需改变(13)或(14)式中的待定常数,即可应用于各种完全不同的连接形式。而公式中的这些待定常数,只需将已知实验数据输入一个预先编制好的程序即可确定。亦可用一个数据库把它们存放起来,可随时调用。另外,从工程设计的角度出发,总希望能提供一个直观的 $M-\theta$ 解析表达式。由于(13)与(14)式形式简单,因而此方法最大的意义或许还在于,可以通过对某一种节点的大量实验数据进行曲线拟合,并对所有已求得的待定常数进行统一分析后,总可以找到这组常数的一个合理取值,得到节点 $M-\theta$ 关系的一条近似曲线,达到简化设计的目的。当然,要对各种不同的连接节点找出一个合适的 $M-\theta$ 设计表达式还有许多工作要做,这是我们下一步工作要解决的问题。

参 考 文 献

- 1 N.Kishi and W.F.Chen. (1986), "Data Base of Steel Beam-to-Column Connections". School of Ciuil Engineering, Purdue University.

(编辑: 徐维森)

ADAPTIVE MOMENT-ROTATION FUNCTIONS FOR SEMIRIGID STEEL FRAMES

Chen Lin

(Department. of Mechanical Electrical Engineering)

Cui Jia Wu Huibi

(Dept. of Civi Elngeering)

ABSTRACT It is difficulty to define the moment-rotation ($M-\theta$) relations of a semirigid connection in steel frame design. Many methods that determine $M-\theta$ relations depend on expermental data and fit the data on a assume modeling function. Since the modeling is fixed for the variety of $M-\theta$ curve, the function doesn't adapt different connection types, and has lower precision or a large number of parameters. This paper presents a adaptive function. Its advantage over previously used is that the form of $M-\theta$ function can be changed by the variety of connection types. Comparison of numerical results with those of other methods indicates that the method presented is precision and less parameters.

KEY WORDS steel frame, semirigid connection, moment-rotation relationship, adaptive function