重 庆 建 筑 工 程 学 院 学 报
第14卷第1期 JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF Vol.14 No.1
1992年 3月 ARCHITECTURE AND ENGINEERING March 1992

研究简报

# Banach空间中可微多目标规划的最优性条件

王 琦

**摘 要** 在[1]中讨论了$R^n$中可微多目标规划的最优性条件，本文利用向量空间中的Farkas引理及其逆命题，将上述条件推广到Banach空间中，导出Banach空间中可微多目标规划存在强Pareto极小点的广义Kuhu—Tucker条件及在涉及到凸性的假设下弱Pareto极小点，的充分条件。

**关键词** 向量最优化，Frechet-可微，Pareto极小点，Farkas引理。

## 1 预备知识

本文采用的术语及符号见[1][2]。

设$X$为实Banach空间，$X^*$为其拓扑对偶。

定义1 $A$在$\bar{x}$的闭锥是包含集$A-\bar{x}=\{a-\bar{x}|a\in A\}$的闭锥之交，记为$C(A,\bar{x})$.

定义2 $A$在$\bar{x}$的局部闭锥为$LC(A,\bar{x})=\bigcap\limits_{N\in N(\bar{X})}C(A\cap N,\bar{x})$，其中$N(\bar{x})$为$\bar{x}$的所有邻域。

定义3 $A$在$\bar{x}$的局部积锥为$LP(A,\bar{x})=\{x^*\in X^*|\langle x^*,z\rangle\leqq 0,\ \forall z\in LC(A,\bar{x})\}$

注[1] (a) $LC(A,\bar{x})\neq\phi$，$\because$ $\{0\}\in LC(A,\bar{x})$；

(b) 若$A$为凸集，则$C(A,\bar{x})=LC(A,\bar{x})$为闭集；

(c) $LP(A,\bar{x})\neq\phi$，且为闭凸锥。

设$f$：$X\to R^m$

定义4 $\bar{x}\in A^\circ$为$f$在$A^\circ$的Pareto极小解$\Longleftrightarrow$不存在$x\in A^\circ$，s.t. $f(x)\leqq f(\bar{x})$。

定义5 $\bar{x}\in A^\circ$为为$f$在$A^\circ$的弱Pareto极小解$\Longleftrightarrow$不存在$x\in A^\circ$,s.t. $f(x)<f(\bar{x})$。

引理1[2]

$z\in LC(A,\bar{x})$存在$\Longleftrightarrow\{x_n\}\subset A$，$\{a_n\}\subset(0,+\infty)$，s.t. $x_n\to\bar{x}$ （当$n\to\infty$）

$$\frac{x_n-\bar{x}}{a_n}\to z \quad (\text{当 } n\to\infty)$$

引理2[3] (Farkas引理)

本文1991年4月16日收到。

设 $E$ 是一个向量空间，$\varphi_1$，…，$\varphi_r \in E^*$。假设对每一个 $x \in E$，若 $\varphi_1(x)$，…，$\varphi_r(x) \leqq 0$，则有 $\varphi(x) \leqq 0$，那么必存在实数 $\sigma_1, \cdots, \sigma_r \geqslant 0$ s.t. $\varphi = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \varphi_i$。

注，Farkas 引理的逆命题亦成立。

## 2 本文主要讨论的问题

(VP)　　$\min f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$

　　s.t. $g(x) \leqq 0$　$h(x) = 0$　$x \in A$

其中 $A$ 为实 Banach 空间 $X$ 中任意开集，$f$: $A \to R^m$，$g$: $A \to R^p$，$h$: $A \to R^q$。为简便起见，记 $M = \{1,2,\cdots,M\}$，$I = \{1,2,\cdots,P\}$，$E = \{1,2,\cdots,q\}$。

令　$A^0 = \{x \in A;\ g_i(x) \leqq 0,\ i \in I,\ h(x) = 0,\ j \in E\}$，则 $A^0$ 为（VP）的可行集。

令　$D = \{z \in X;\ g_i'(\overline{x})z \leqq 0,\ i \in I_0,\ h_j'(\overline{x})z = 0,\ j \in E\}$　其中 $I_0 = \{i \in I;\ g_i(\overline{x}) = 0\}$，则 $D$ 为 $A$ 在 $\overline{x}$ 的线性化锥。

我们提出 Banach 空间中的一所约束性为

(LCQ)　　$D = \angle C(A, \overline{x})$

## 3 本文主要结果

定理1（广义 Kuhn—Tucker 条件）设

(i)　$\overline{x}$ 是（VP）的一个强 Pareto 极小解，

(ii)　$f, g, h$ 在 $\overline{x}$　$F$—可微；

(iii)　$gI_0$，$h$ 在 $\overline{x}$ 满足（$LCQ$）约束品性；则存在 $u^0 \in R_+^m$，$u^0 \neq 0$，$v^0 \in R_+^p$，$w^0 \in R^q$ s.t.

(a)　$[f'(\overline{x})]^T u^0 + [g'(\overline{x})]^T v^0 + [h'(\overline{x})]^T w^0 = 0$

(b)　$[g'(\overline{x})]^T v^0 = 0$

(c)　$g(\overline{x}) \leqq 0$

(d)　$h(\overline{x}) = 0$

证明　设 $\overline{x}$ 是问题（$VP_1$）的弱 Pareto 极小点，则 $\overline{x} \in A^0$，∴(c)，(d)满足。

情形 1　设 $\forall z \in \angle C(A^0, \overline{x})$，由引理1,则存在 $\{x_n\} \subset A^0$，$\{x_n\} \to \overline{x}$,存在 $\{\alpha_n\} \subset (0, +\infty)$，$\alpha_n \to 0$，且 $\frac{x_n - \overline{x}}{\alpha_n} \to z$ $(n \to \infty)$。

由 $f_i$ 在 $\overline{x}$ 连续，$f_i(x_n) \to f_i(\overline{x})$　$(n \to \infty)$。

由 $f_i$ 在 $\overline{x}$　$F$—可微及 $\overline{x}$ 为强 Pareto 极小点，

∴　$\lim_{n \to \infty} \frac{f_i(x_n) - f_i(\overline{x})}{\alpha_n} = f_i'(\overline{x})z \geqslant 0$

$$\therefore\quad -f_i'(\overline{x})z \leqq 0 \qquad \forall z \in LC(A^0, \overline{x}) \tag{1}$$

但由(iii)，$g_{I_0}$，$h$在$\overline{x}$满足(LCQ)

即 $$LC(A^0,\overline{x})=D$$

∴ 对$\forall z\in LC(A^0,\overline{x})=D$，由$D$之定义，一方面有

$$g_i'(\overline{x})z\leqq 0 \qquad i\in I_0 \tag{2}$$

$$h_j'(\overline{x})z\leqq 0 \qquad j\in E \tag{3}$$

$$-h_j(\overline{x})z\leqq 0 \qquad j\in E \tag{4}$$

又由(1.1)式，必有

$$-f_t'(\overline{x})z\leqq 0 \qquad \forall t\in M \tag{5}$$

情形2

设$z\in X$，但$z\notin LC(A^0,\overline{x})$，由(iv)，$z\notin D$，因而$z$不满足(2)—(4)。

综合情形1，2，对$\forall t\in M$，对$\forall z\in X$，若$z$满足(2)—(4)，则必有$-f_t'(\overline{x})z\leqq 0$。

∴由实向量空间中的Farkas引理，见引理2，必存在实数$\sigma_k^t\geqslant 0$，($\forall t\in M$)，对$K=1,2,\cdots,p_0,p_0+1,p_0+2q$，满足

$$-f_t'(\overline{x})=\sum_{k=1}^{p_0}\sigma_k^t\, g_k'(\overline{x})+\sum_{l=1}^{q}(\sigma_{p_0+l}^t-\sigma_{p_0+q+l}^t)h_l'(\overline{x})$$

$$\therefore\quad -\sum_{t=1}^{m}f_t'(\overline{x})=\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_0}\sigma_k^t\, g_k'(\overline{x})+\sum_{t=1}^{m}\sum_{l=1}^{q}(\sigma_{p_0+l}^t-\sigma_{p_0+q+l}^t)h_l'(\overline{x})$$

$$=\sum_{k=1}^{q_0}\Big(\sum_{t=1}^{m}\sigma_k^t\Big)g_k'(\overline{x})+\sum_{l=1}^{q}\sum_{t=1}^{m}(\sigma_{p_0+l}^t-\sigma_{p_0+q+l}^t)h_l'(\overline{x})$$

令 $u^0=(1,1,\cdots,1)\in R_+^m$，$v_1^0=\Big(\sum_{t=1}^{m}\sigma_1^t,\cdots,\sum_{t=1}^{m}\sigma_{p_0}^t\Big)\in R_+^{p_0}$

$$w^0=\Big(\sum_{t=1}^{m}(\sigma_{p_0+1}^t-\sigma_{p_0+q+1}^t),\cdots,\sum_{t=1}^{m}(\sigma_{p_0+q}^t-\sigma_{p_0+2q}^t)\Big)\in R^q$$

即得 $[f'(\overline{x})]^T u^0+[g_{I_0}'(\overline{x})]^T v_1^0+[h'(\overline{x})]^T w^0=0$

再令 $v_2^0=0\in R^{p/p_0}$，则 $v^0=(v_1^0,\ v_2^0)\in R_+^p$

显然得

$$[f'(\overline{x})]^T u^0+[g'(\overline{x})]^T v^0+[h'(\overline{x})]^T w^0=0$$

∴(a)式成立。

又对$i\in I_0$，有$g_i(\overline{x})=0$，而对$i\in I/I_0$，

由$v_i^0=0$，∴对$\forall i\in I$，$g_i(\overline{x})\cdot v_i^0=0$

即　　$[g(\bar{x})]^T v^0 = 0$

∴(b)式成立，整个证明完成。 §

定理2　（充分性）假设

（i）$f,g,h$在$\bar{x}$可微；

（ii）$f,gI_0,h$在$\bar{x}$凸；

（iii）存在$u^0>0$，$u^0\in R^m$，$v^0\geqslant 0$，$v_0\in R^{p_0}$，　$w^0\geqslant 0$，$w^0\in R^q$，s.t

（a）$[f'(\bar{x})]^T u^0+[g'(\bar{x})]^T v^0+[h'(\bar{x})]w^0=0$；

（b）$g(\bar{x})\leqq 0$；

（c）$h(\bar{x})=0$；

则$\bar{x}$是$f$在$A^0$上的一个弱 Pareto 极小点。

证明

若$\bar{x}$不是$f$在$A^0$上的一个弱 Pareto 极小点，则存在$x^0\in A^0$，s.t

$$f(x^0)-f(\bar{x})<0 \tag{6}$$

$$g(x^0)\leqq 0 \tag{7}$$

$$h(x^0)=0 \tag{8}$$

∵　当$i\in I_0$时，$g_i(\bar{x})=0$

∴

$$f(x^0)-f(\bar{x})<0 \tag{9}$$

$$gI_0(x^0)-gI_0(\bar{x})\leqq 0 \tag{10}$$

$$h(x^0)-h(\bar{x})=0 \tag{11}$$

见假设(ii)和（9）—（11）及[4]，有

$$f'(\bar{x})(x^0-\bar{x})\leqq f(x^0)-f(\bar{x})<0$$

$$gI_0(\bar{x})(x^0-\bar{x})\leqq gI_0(x^0)-gI_0(\bar{x})\leqq 0$$

$$h'(\bar{x})(x^0-\bar{x})\leqq h_j(x^0)-h_j(\bar{x})=0$$

即

$$f'_t(\bar{x})(x^0-\bar{x})<0 \qquad t\in M \tag{12}$$

$$g'_i(\bar{x})(x^0-\bar{x})\leqq 0 \qquad i\in I_0 \tag{13}$$

$$h'_j(\bar{x})(x^0-\bar{x})\leqq 0 \qquad j\in E \tag{14}$$

由假设(iii)，存在$u^0\in R^m_+$，$u^0>0$，$v^0\in R^{p_0}_+$，$w^0\in R^q_+$，s.t　(a)式成立，即

$$[f'(\bar{x})]^T u^0+[g'_{I_0}(\bar{x})]^T v^0+[h'(\bar{x})]^T w^0=0 \tag{15}$$

令　$\varphi=-[f'(\bar{x})]^T u^0$，则$\varphi\in X^*$.

当　$l=1,2,\cdots,p_0$时，令$\sigma_l=\sigma_i=v_i^0$，

$$\varphi_l=g'_i(\bar{x}), \qquad i=1,\cdots,p_0,$$

当　$l=p_0+1,\cdots,p_0+q$时，

令　$\sigma_l=\sigma_{p_0+j}=w_j^0 \qquad j=1,2,\cdots,q$

$$\varphi_l=\varphi_{p_0+j}=h'_j(\bar{x})$$

由（15）式知，存在$\sigma_l \geqslant 0$，$l=1,2,\cdots,p_0+q$，

s.t
$$\varphi = -[f'(\bar{x})^T u^0 = [g'_{I_0}(\bar{x})]^T v_0 + [h'(\bar{x})]^T w^0 = \sum_{l=1}^{p_0+q} \sigma_l \varphi_l$$

由Farkas引理的逆命题，对每一个满足$\varphi_l(x) \leqq 0$的$x \in E$，均应有$\varphi(x) \leqq 0$，∴满足（13），（14），$x^* - \bar{x} \in E$，均应有

$$\varphi(x^* - \bar{x}) = -([f'(\bar{x})]^T u^0)(x^* - \bar{x}) \leqq 0$$

即
$$[u_1^0 f_1'(\bar{x}) + u_2^0 f_2'(\bar{x}) + \cdots + u_m^0 f_m'(\bar{x})](x^* - \bar{x}) \geqslant 0$$

但这与（12）式$f_t'(\bar{x})(x^* - \bar{x}) < 0$，（$t \in M$）及$u_t^0 > 0$矛盾。

∴ $\bar{x}$是$f$在$A^0$上的一个弱Pareto极小点。∎

定理3 （充分性）假设

（1） $f, gI_0$，$h$在$\bar{x}$ $F$-可微；

（2） 存在$u^0 > 0, u^0 \in R^m, v^0 \in R_+^{p_0}$，$w^0 \in R^q$，s.t. 对所有的$x \in A^0$均有

（a） $(x - \bar{x})^T \{[f'(\bar{x})]^T u^0 + [g'_{I_0}(\bar{x})]^T v^0 + [h'(\bar{x})]^T w^0\} \geqslant 0$，$\forall x \in A^0$；

（b） $g(\bar{x}) \leqq 0$；

（c） $h(\bar{x}) = 0$；

（3） $[u^0]^T f + [v^0]^T gI_0 + [w^0]^T h$ 在 $\bar{x}$ 伪凸；

则$\bar{x}$为$f$在$A^0$上的一个弱Pareto极小点。

证明

若$\bar{x}$不为$f$在$A^0$上的弱Pareto极小点，则存在$x^0 \in A^0$，满足

$$f(x^0) - f(\bar{x}) < 0$$

∵ $x^0 \in A^0, \bar{x} \in A^0$，且$gI_0(\bar{x}) = 0$

∴
$$f(x^0) - f(\bar{x}) < 0$$
$$gI_0(x^0) - gI_0(\bar{x}) \leqq 0$$
$$h(x^0) - h(\bar{x}) = 0$$

∵ $u^0 > 0$，$v^0 \geqslant 0$，$h(x^0) = h(\bar{x}) = 0$

∴ $$[u^0]^T f(x^0) + [v^0]^T gI_0(x^0) + [W^0]^T h(x^0) < [u^0]^T f(\bar{x}) + [v_0]^T gI_0(\bar{x}) + [w^0]^T h(\bar{x})$$

∵ $[u^0]^T f + [v^0]^T gI_0 + [w^0]^T h$ 在$\bar{x}$伪凸，见[4]及上式

∴ $\{[u^0]^T f + [v_0^0]^T gI_0 + [w_0]^T h\}'(\bar{x})(x^0 - \bar{x}) < 0 \quad x^0 \in A^0$

而这与条件(2)(a)矛盾。

∴ $\bar{x}$是（$VP$）的弱Pareto极小点。∎

定理4（充分性）假设

（1） $f$，$gI_0$，$h$在$\bar{x}$ $F$-可微，

(2)　存在$u^0>0$，$u^0\in R^m_+$，$v^0\in R^p_+$，$w^0\in R^q$使

(a)　$\sum_{i=1}^{m}u_i^0 f_i$ 在$\bar{x}$伪凸；

(b)　$\sum_{i=1}^{p_0}v_i^0 g_i$ 在$\bar{x}$拟凸；

(c)　$\sum_{i=1}^{p_0}v_i^0 g_i$ 在$\bar{x}$拟凸；

(d)　$\{[f'(\bar{x})]^T u^0+[g'_{I_0}(\bar{x})]^T v^0+[h'(\bar{x})]^T w^0\}(x-\bar{x})\geqslant 0\qquad \forall x\in A^0$

(e)　$(v^0)^T g(\bar{x})=0$

(f)　$g(\bar{x})\leqq 0$

(g)　$h(\bar{x})=0$

则$\bar{x}$是 $f$ 在 $A^0$ 上的 Pareto 极小点。

证明

$\because\ (v_0)^T g(\bar{x})=0$，又$\because(\bar{x})\leqq 0$，$v^0\geqslant 0$ 显然，　当 $i\in I^0$时，$g_i(\bar{x})=0$，

$\therefore\ \sum_{i\in I_0} v_i g_i(\bar{x})=0$，又对$\forall x\in A^0$，由 $v^0\geqslant 0$，$\therefore\ \sum_{i\in I_0} v_i^0 g_i(x)\leqq 0$，

由此得　$\sum_{i\in I_0} v_i^0 g_i(x)\leqq \sum_{i\in I_0} v_i^0 g_i(\bar{x})$

$\because\ \sum_{i\in I_0} v_i^0 g_i$ 在$\bar{x}$拟凸，有

$$\Big(\sum_{i\in I_0} v_i^0 g_i\Big)'(\bar{x})(x-\bar{x})\leqq 0\qquad \forall x\in A^0 \tag{16}$$

当 $i\in I/I_0$ 时，$\because\ g_i(\bar{x})<0$，而 $\sum_{i\in I/I_0} v_i^0 g_i(\bar{x})=0$　导出 $v_i^0=0$，$\therefore v_i^0\ g_i'(\bar{x})=0$

$i\in I/I_0$

$$\therefore\ \Big(\sum_{i\in I/I_0} v_i^0\ g_i(\bar{x})\Big)(x-\bar{x})=0 \tag{17}$$

综合 (16) (17) 两式，有

$$[[g'(\bar{x})]^T v^0](x-\bar{x})\leqq 0\qquad \forall x\in A^0 \tag{18}$$

类似地，由 $h_j(\bar{x})=0$，则 $w_j^0 h_j(\bar{x})=0$　　又$\forall x\in A^0$　$h_i(x)=0$

$\therefore\ \ w_j^0\ h_j(\bar{x})=0=w_j^0 h_j(x)\qquad \forall x\in A^0$

$\because\ \sum_{j=1}^{q} w_j^0 h_j$ 在$\bar{x}$拟凸，$\therefore$由[ 4 ]有

$$[[h_j'(\bar{x})]^T w^0](x-\bar{x})\leqq 0\qquad \forall x\in A^0 \tag{19}$$

由条件(2)($d$)及(16)，(19)两式，导出

$$[[f'(\overline{x})]^T u^\circ](x-\overline{x})' \geqslant 0 \qquad \forall x \in A^\circ \tag{20}$$

∵ $\sum_{i=1}^{m} u_i^\circ f_i'(\overline{x})$ 是伪凸，见[4]，由(20)式，此蕴涵 $\sum_{i=1}^{m} u_i^\circ f_i(x) \geqslant \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ f(\overline{x})$

$\forall x \in A^\circ$

∴ $\overline{x}$ 为(VP)的Pareto极小点。

注：定理1 可推广到 $x$ 为正真有效解时。

## 参 考 文 献


1 C. Singh. Optimality Conditions in Multiobjective Differentiable Programming Journal of Optimization Theory and Applications, Vol, 53, No.1, 1987

2 P.P.Varaiya. Nonlinear Programming in Banach Space.SIAM J. Appl. Math., Vol.16, No.2, 1967

3 Bernhand Korte. Modern Applied Mathematics Optimization and Operations Research. North-Holland Publishing Company, 1982, p.134-135

4 J. Ponstein. Seven Kinds of Convexity. SIAM Review, Vol.9, No.1, 1967


(编辑：刘家凯)

# OPTIMAL CONDITIONS OF DIFFRENTIAL MULTIOBJECTIVE PROGRAMMING IN BANACH SPACES

*Wang Qi*

(Department of Natural Science)

**ABSTRACT** In this paper, by the use of Farkas lemma and its inverse proposition, the generalized Kuhu-Tuoker conditions for the existance of strong minimum point in differential multiobjective programming in Banach spaces and the existance of sufficient condition of weak Pareto minimum Foint are derived.

**KEY WORDS** vector optimality, Frechet differentiability weak minimum point, Parkas lemma in real vector spaces