

10-23

高层钢框架的非线性响应分析*

刘小强 吴惠弼

(建筑工程系) Tu 973.13

摘要 几何非线性对高层钢框架的影响较大。本文比较系统地归纳了各种坐标系下几何非线性的分析方法,并给出了其相应的切线刚度矩阵的显式,解释了切线刚度阵的各项非线性性质的几何意义及其简易推导方法。利用建立的同时考虑材料非线性和几何非线性性质的杆单元切线和割线刚度矩阵编制了电算程序,该程序能求解高层多跨钢框架的极限承载力。

高层建筑, 空间结构, 钢框架

关键词 几何非线性, 材料非线性, 高层钢框架, 极限承载力

当前,随着高层钢框架的应用和发展,对框架的非线性分析日显重要。非线性分析包括由材料性质引起的材料非线性和杆件的几何形状改变较大引起的几何非线性。钢框架的材料非线性分析模型通常包括将塑性考虑成集中在某一区域的塑性铰理论和考虑塑性区域分布和扩展的弹塑理论。而几何非线性的分析模型种类繁多,根据坐标系和形函数的选择不同导出单元切线刚度阵表面上看上去似乎相差很大。目前常用的方法有 Euler 法,全 Lagrange 法,修正的 Lagrange 法和 Lagrange-SR 法,这些方法都是由坐标的选择不同而导致的,不同的方法显然对位移的估计存在偏差。框架杆单元的杆端转角和位移按其大小不同可分为以下四类:

- (1) 小转角, 小位移;
- (2) 大转角, 小位移;
- (3) 小转角, 大位移;
- (4) 大转角, 大位移。

杆件之所以产生大转角主要是其线刚度较小所致,而大位移则和框架的整体抗侧移刚度有关,而框架的侧移刚度又与框架的层数,跨数以及节点连接的方法有关,高层,少跨和半刚性节点连接的侧向位移通常较大,几何非线性不容忽视。具体杆件属哪类大位移应视具体情况而定。第(1)类位移属一阶线性理论,本文将在以下的讨论中逐一给出(2), (3), (4)类位移的单元刚度阵。

本文1991年12月6日收到。

• 国家自然科学基金和博士点专项科研基金资助课题。

1 杆单元的刚度矩阵

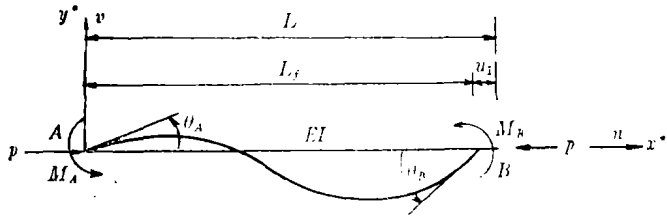


图 1 运动坐标系中的杆件力，位移和几何参数

图 1 绘出了只包含独立杆端力和位移向量的 Euler 运动坐标系 x^*y^* 。为节省篇幅本文以下只讨论杆端轴力是压力时的情况。杆单元的刚度矩阵与形函数的选择有关，本文在形函数的选择方面没有沿用有限元中的侧向位移的三次多项式插值。考虑到钢框

架的稳定性，四阶以上的项都没有忽略，则其满足边界条件的侧向位移的形函数用下式表达：

$$v = \frac{M_B}{P} \left[\frac{x}{l_f} - \frac{\sin \frac{\rho x}{l_f}}{\sin \rho} \right] + \frac{M_A}{P} \left[\frac{\sin \rho \left(1 - \frac{x}{l_f} \right)}{\sin \rho} - 1 + \frac{x}{l_f} \right] \quad (1)$$

其中 $\rho = \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}$ $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

轴向位移用线性函数插值：

$$u = \frac{x}{L} u_1 \quad (2)$$

考虑了高次项后的轴向总应变为：

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + y \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (3)$$

杆件的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int E \varepsilon^2 dV \quad (4)$$

杆单元的平衡方程和切线刚度阵可对应变能中的坐标变量求导得出

$$\{S\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial d_i} \right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

$$[t] = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial d_i \partial d_j} \right] \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad (6)$$

式中 S_i 为杆端力向量元素， $\{S\}^T = \{P \ M_A \ M_B\}$ ， d_i 为杆端位移向量元素， $\{d\}^T = \{u_1 \ \theta_A \ \theta_B\}$ 。将式(1)，(2)，(3)，(4)代入(5)，(6)式中，忽略高阶无穷小，可以求出其割线刚度和切线刚度矩阵的显式：

$$\begin{Bmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{L} \phi_1 & \frac{EI}{L} \phi_2 \\ 0 & \frac{EI}{L} \phi_2 & \frac{EI}{L} \phi_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} EA u_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

或 $\{S\} = [k_s] \{d\} - \{S_s\} \quad (5b)$

上式中

$$\phi_1 = \frac{\rho(\sin\rho - \rho\cos\rho)}{2 - 2\cos\rho - \rho\sin\rho} \quad (7)$$

$$\phi_2 = \frac{\rho(\sin\rho - \rho)}{\rho\sin\rho + 2\cos\rho - 2} \quad (8)$$

$$u_0 = b_1(\theta_A + \theta_B)^2 + b_2(\theta_A - \theta_B)^2 \quad (9)$$

$$b_1 = \frac{(\phi_1 + \phi_2)(\phi_2 - 2)}{8\rho^2} \quad (10)$$

$$b_2 = \frac{\phi_2}{8(\phi_1 + \phi_2)} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_A \\ \Delta M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & D_1 & D_2 \\ D_1 & i\phi_1 & i\phi_2 \\ D_2 & i\phi_2 & i\phi_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta \theta_A \\ \Delta \theta_B \end{Bmatrix} \quad (6a)$$

或

$$\{\Delta S\} = [t]\{\Delta d\} \quad (6b)$$

其中

$$D_1 = EA(C_1\theta_A + C_2\theta_B) \quad (12)$$

$$D_2 = EA(C_2\theta_A + C_1\theta_B) \quad (13)$$

$$C_1 = \frac{-\rho^2\phi_2 - (\phi_1 + \phi_2)^2(\phi_2 - 2)}{4\rho^2(\phi_1 + \phi_2)} \quad (14)$$

$$C_2 = \frac{\rho^2\phi_2 - (\phi_1 + \phi_2)^2(\phi_2 - 2)}{4\rho^2(\phi_1 + \phi_2)} \quad (15)$$

(6a) 式中 $i = \frac{EI}{L}$ 为线刚度

2 全Lagrange坐标系下的单元切向刚度矩阵

图2 绘出了一个由 Euler 运动坐标系 $x^* \sim y^*$, 全 Lagrange 局部坐标系 $x' \sim y'$ 和整体坐标系 $x \sim y$ 组成的坐标参照图, 其相应的杆端位移和力向量分别表示成 $\{d\}$, $\{S\}$; $\{q\}$, $\{Q\}$ 和 $\{w\}$, $\{F\}$, 运动坐标系 $x^* \sim y^*$ 和全 Lagrange 坐标系 $x' \sim y'$ 之间的位移相关关系可用下式表达:

$$\theta_A = q_3 - \theta_0 = q_3 - \arctg \frac{q_5 - q_2}{L - q_1 + q_4} \quad (16)$$

$$\theta_B = q_6 - \theta_0 = q_6 - \arctg \frac{q_5 - q_2}{L - q_1 + q_4} \quad (17)$$

$$u_1 = \sqrt{(q_6 - q_2)^2 + (L - q_1 + q_4)^2} - L \quad (18)$$

位移增量的相关方程为

$$\{\Delta d\} = [A]\{\Delta q\} \quad (19)$$

矩阵 $[A]$ 为转换矩阵 $A_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial q_j}$. 如果定义 $C = \cos\theta_0$, $S = \sin\theta_0$. 则

$$[A] = \begin{pmatrix} C & S & 0 & -C & -S & 0 \\ -\frac{S}{L_f} & \frac{C}{L_f} & 1 & \frac{S}{L_f} & -\frac{C}{L_f} & 0 \\ -\frac{S}{L_f} & \frac{C}{L_f} & 0 & \frac{S}{L_f} & -\frac{C}{L_f} & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

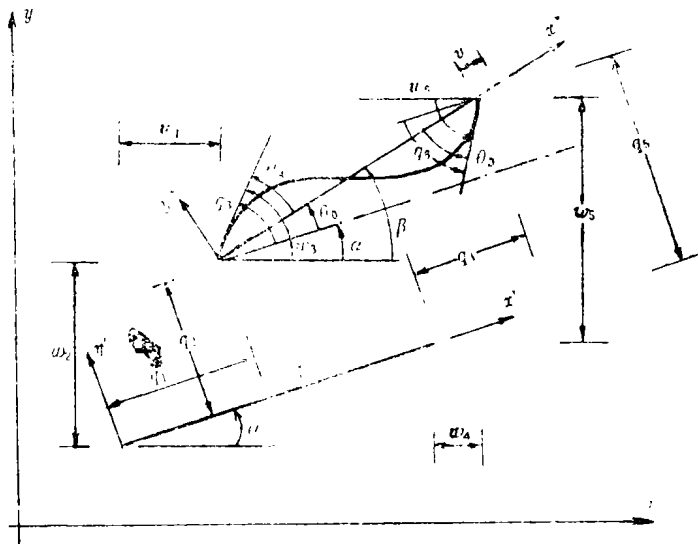


图 2 各种坐标系下的位移向量

杆端力向量的转换方程为

$$\{Q\} = [B]\{S\} \quad (21)$$

其中 $[B] = [A]^T$, 增量相关方程由求导法则给出

$$\begin{aligned} \{\Delta Q\} &= [A]^T \{\Delta S\} + [\Delta B]\{S\} \\ &= [A]^T [t][A]\{\Delta q\} + [\Delta B]\{S\} \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $[\Delta B]$ 是增量转换矩阵

$$\Delta B_{iK} = \sum_{j=1}^6 G_{ij}^{(K)} \Delta q_j \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [\Delta B]\{S\} &= \sum_{K=1}^3 \Delta B_{iK} S_K = \sum_{K=1}^3 \sum_{j=1}^6 G_{ij}^{(K)} \Delta q_j S_K = \sum_{j=1}^6 \left(\sum_{K=1}^3 G_{ij}^{(K)} S_K \right) \Delta q_j \\ &= S_1 [G^{(1)}] \{\Delta q\} + S_2 [G^{(2)}] \{\Delta q\} + S_3 [G^{(3)}] \{\Delta q\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$[G^{(2)}] = [G^{(3)}] = \frac{1}{L_f^2} \begin{pmatrix} -2SC & C^2 - S^2 & 0 & 2SC & -(C^2 - S^2) & 0 \\ & 2CS & 0 & -(C^2 - S^2) & -2SC & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{对称} & -2SC & C^2 - S^2 \\ & & & & & 2SC \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$[G^{(i)}] = \frac{1}{L_i} \begin{pmatrix} -S^2 & SC & 0 & S^2 & -SC & 0 \\ & -C^2 & 0 & -SC & C^2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -S^2 & SC & 0 \\ & \text{对称} & & & -C^2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

将(24)式代入(22)式可得全Lagrange坐标系下的增量平衡方程

$$\{\Delta Q\} = ([A]^T [t] [A] + \sum_{i=1}^3 [G^{(i)}] S_i) \{\Delta q\} \quad (22a)$$

3 整体坐标系下的刚度矩阵

欧拉法考虑了大转角, 大位移。它与全Lagrange坐标用一个不变的转换矩阵 $[C_0]$ 联系

$$[C_0] = \begin{pmatrix} [C_i] & [0] \\ [0] & [C_i] \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$[C_i] = \begin{pmatrix} m & n & 0 \\ -n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

其中 $m = \cos \alpha$, $n = \sin \alpha$

$$\{\Delta F\} = [C_0]^T \{\Delta Q\} \quad (29)$$

$$\{\Delta q\} = [C_0] \{\Delta w\} \quad (30)$$

将(22a)代入(29), (30)式可以得到欧拉法的增量平衡方程

$$\{\Delta F\} = ([T]^T [t] [T] + \sum_{i=1}^3 [C_0]^T [G^{(i)}] [C_0] S_i) \{\Delta w\} \quad (31)$$

$[T]$ 和 $[A]$ 的表达式一样, 只要将 $[A]$ 中的转角 θ_0 换成 β 就成为 $[T]$

4 Lagrange-SR 坐标系下的切线刚度矩阵

当 $\theta_0 \leq 10^\circ$ 时可以认为 $\theta_0 \approx 0$, 此时属小位移, 大转角情况。从运动坐标到整体坐标系力的转换矩阵为 $[B']$, 从整体坐标到局部坐标的位移转换矩阵为 $[A']$, 并有 $[A']^T = [B']$, 则

$$[B']^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\{\Delta Q\} = [A']^T \{\Delta S\} = [A']^T [t] [A'] \{\Delta q\} \quad (33)$$

在整体坐标系下的增量平衡方程为

$$\{\Delta F\} = [C_0]^T [A']^T [t] [A'] [C_0] \{\Delta w\} \quad (34)$$

5 修正的 Lagrange 坐标系下的切线刚度矩阵

上面用 Lagrange-SR 坐标系建立的增量平衡方程只适用于杆端的相对侧移差与杆长的比值比较小的情况，当杆轴的转动较大时，可用修正的 Lagrange 坐标系求解。参照图 3，

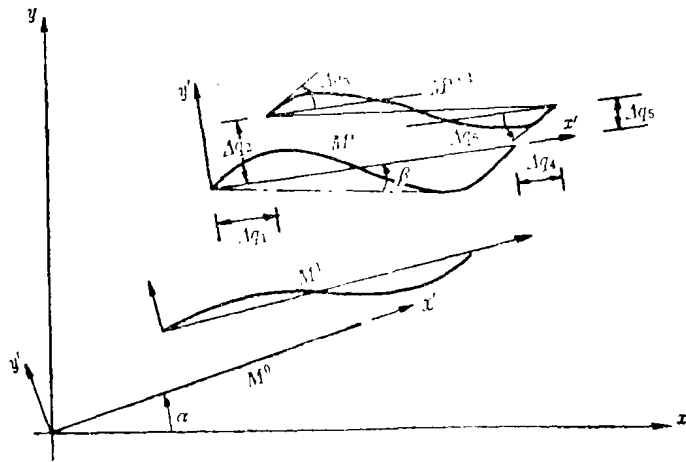


图 3 修正的 Lagrange 坐标系中的位移增量

设杆件的初始状态在 M_0 处，经过 i 次变形增量后杆件运动到 M^i 状态，此时如给定一个荷载增量，则杆件将运动到 M^{i+1} 状态。如果 M^{i+1} 状态下的杆端位移用运动的 Lagrange 坐标(即相对于 M^i 状态写出)度量，其位移向量定义为 $\{\Delta q\}^T = \{\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_6\}$ ，设杆件由于外力的作用在 M^i 和 M^{i+1} 状态下的应变分别为 ${}^i\epsilon$ 和 ${}^{i+1}\epsilon$ 。则 ${}^{i+1}\epsilon = {}^i\epsilon + \Delta\epsilon$ ， $\Delta\epsilon$ 代表 M^i 到 M^{i+1} 的应变增量，这时杆件的应变能为

$$U = \int {}^{i+1}\epsilon^2 \frac{E}{2} dV = \frac{E}{2} \int (\Delta\epsilon^2 + 2{}^i\epsilon\Delta\epsilon + \epsilon^2) dV \quad (35)$$

其切线刚度矩阵的元素按下式求得

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \Delta q_i \partial \Delta q_j} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \Delta q_i \partial \Delta q_j} \quad (36)$$

(36) 式中 U_1 和 U_2 分别代表 (35) 中的第一项和第二项，第三项由于与位移 Δq_i 无关，其偏导数为零。显然 (36) 式中的第一项与 Lagrange-SR 坐标下的切线刚度矩阵相同。其第二项应变能等于

$$U_2 = \int E \left[\frac{d\Delta u}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + y \left(\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right) \right] \epsilon dV \quad (37)$$

其中

$$\epsilon = \sum_{j=0}^i \left[\frac{{}^j q_4 - {}^j q_1}{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{d v_j}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2 v_j}{dx^2} \right] \quad (38)$$

上式中 v_j 代表 M^j 中的杆端位移。由于 Δu 和 Δv 是 Δq_i 的线性函数，其二次偏导数对 (37) 式的第一项和第三项为零。由于 Δv 其值较小， $\frac{d\Delta v}{dx} \approx \frac{\Delta q_2 - \Delta q_5}{L_j}$ ，则 (37) 式简化为

$$U_2 = - \int_0^{L_j} \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 dx \int_A \epsilon F dA = - \frac{P}{2} \int_0^{L_j} \left(\frac{\Delta q_2 - \Delta q_5}{L_j} \right)^2 dx \quad (37a)$$

将(37a)代入(36)式整理后可得参照修正的 Lagrange 坐标的切线刚度矩阵 $[K']$ 为

$$[K'] = [A']^T [t] [A'] - \frac{P}{L_f} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{matrix} \quad (36a)$$

对称

整体坐标系的切线单元刚度矩阵可由通常的坐标变换求得

$$[K] = [C]^T [K'] [C] = [T]^T [t] [T] + S_1 [C_0]^T [G^{(1)}] [C_0] \quad (39)$$

将 $[C_0]$ 中的角度 α 换成 β 即为矩阵 $[C]$

比较(31)式和(39)式，(31)式要多二项，显然修正的 Lagrange 法不是严格的欧拉法。

现在我们来讨论欧拉法(31)式后三项的几何意义。众所周知，几何非线性问题中的增量平衡方程建立在变形后的几何位置上并且参照于变形前的位置写出。参照图 3，杆件从 M 运动到 M^{i+1} 状态的过程中，杆件的增量平衡包括由于外力的增加引起的杆件变形和由于杆件的刚体运动使在 M^{i+1} 状态下的杆端力向量产生了在 M^i 状态下的力的增量。前者可由 $[A']^T [t] [A']$ 来表达，而后者的表达式可用以下方式导出，参照图 4 杆的 A 端，在 M^{i+1} 状态下轴力和剪力分别为 N 和 $(M_A + M_B)/L_f$ ，且其相对于 M^i 状态下的投影式为：

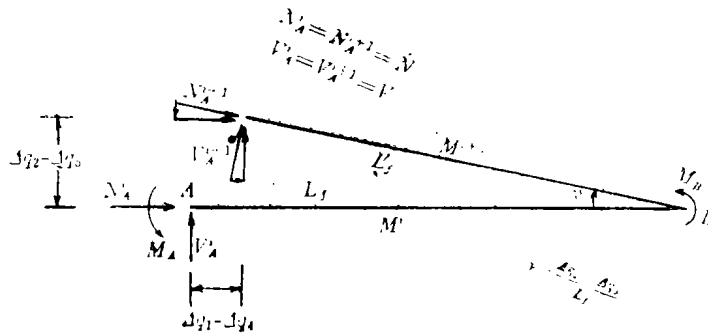


图 4

$$N_A' = \frac{M_A + M_B}{L_f} \sin \nu + N \cos \nu$$

$$V_A' = \frac{M_A + M_B}{L_f} \cos \nu - N \sin \nu$$

由于是在微小增量状态下建立的方程， $\cos \nu = 1$ ， $\sin \nu = (\Delta q_2 - \Delta q_5)/L_f$ 。另外在 M^i 状态下的轴力和剪力为 N 和 $(M_A + M_B)/L_f$ 。且 M^{i+1} 状态相对于 M^i 状态的轴力和剪力增量分别为

$$\Delta N_A = N_A' - N = \frac{(M_A + M_B)}{L_f} \frac{(\Delta q_2 - \Delta q_5)}{L_f} \approx \frac{(M_A + M_B)(\Delta q_2 - \Delta q_5)}{L_f^2}$$

$$\Delta V_A = \frac{M_A + M_B}{L_f} - \frac{M_A + M_B}{L_f} - N \frac{\Delta q_2 - \Delta q_5}{L_f}$$

$$= \frac{(M_A + M_B)}{L_f'} \frac{(L_f - L_f')}{L_f} - N \frac{\Delta q_2 - \Delta q_5}{L_f}$$

$$= \frac{(M_A + M_B)(\Delta q_1 - \Delta q_4)}{L_f^2} - N \frac{\Delta q_2 - \Delta q_5}{L_f}$$

同理对 B 端也可得到相同的结果，将杆 AB 的两端综合起来其增量可用下式表达：

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \Delta q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta q_1 \\ & & 0 & 0 & -1 & 0 & \Delta q_2 & & 1 & 0 & 0 & -1 & \Delta q_2 \\ & & & 0 & 0 & 0 & \Delta q_3 & -N & & 0 & 0 & 0 & \Delta q_3 \\ \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & & & & & 0 & \Delta q_4 & -L_f & & & 0 & 0 & \Delta q_4 \\ & & & & & 0 & \Delta q_5 & & & & 0 & 0 & \Delta q_5 \\ & & & & & 0 & \Delta q_6 & & & & & 0 & \Delta q_6 \end{array}$$

对称 对称

(40)

或缩写成

$$\left\{ \frac{M_A + M_B}{L_f^2} [I_a] - \frac{N}{L_f} [II_a] \right\} \{\Delta q\} \tag{40a}$$

如将杆件变形项 $[A']^T [t] [A']$ 和 (40a) 式加起来并将其转换到整体坐标系可得其增量平衡方程

$$\{\Delta F\} = \left[[C]^T [A']^T [t] [A'] [C] + [C]^T \left(\frac{M_A + M_B}{L_f^2} [I_a] - \frac{N}{L_f} [II_a] \right) [C] \right] \{\Delta w\} \tag{41}$$

由计算可知 $[C]^T [A']^T = [T]^T$, $[C]^T \frac{1}{L_f^2} [I_a] [C] = [C_0]^T [G^{(2)}] [C_0]$, $[C]^T \frac{1}{L_f} [II_a] [C] = [C_0]^T [G^{(3)}] [C_0]$ 。故 (41) 式的结果和 Euler 法式 (31) 完全相同。从而可以看出 (41) 式中的第二项和第三项分别表示当杆 AB 产生了杆端侧移差后杆端剪力所产生的附加剪力和由于杆长的缩短产生的附加轴力，第四项表示由于杆端侧移差轴力产生的附加剪力。

6 小转角大位移时的增量平衡方程及杆单元的平衡方程

以上的探讨可知由于杆长的缩短引起的附加轴力和杆端位移差引起的附加剪力具有同等大小的量级。而通常轴向位移是较小的，这时在 (41) 式中忽略第二项的影响其增量方程变为

$$\{\Delta F\} = [C]^T \left([A']^T [t] [A'] - \frac{N}{L_f} [II_a] \right) [C] \{\Delta w\} \tag{42}$$

当杆件的弯曲线刚度比其抗侧移刚度大得多时，可用小转角大位移的增量平衡方程来描述杆件的工作性能，这时可认为 $\theta_A \approx \theta_B \approx 0$ 。在 (42) 式中相当于元素 D_1 和 D_2 在 $[t]$ 中为零。则小转角大位移的增量平衡方程为

$$\{\Delta F\} = [C]^T [\bar{K}] [C] \{\Delta w\} \tag{43}$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{2i(\phi_1 + \phi_2)}{L^2} - \frac{P}{L} & \frac{i(\phi_1 + \phi_2)}{L} & 0 & -\frac{2i(\phi_1 + \phi_2)}{L^2} + \frac{P}{L} & \frac{i(\phi_1 + \phi_2)}{L} & 0 \\ & i\phi_1 & 0 & -\frac{i(\phi_1 + \phi_2)}{L} & i\phi_2 & 0 \\ & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2i(\phi_1 + \phi_2)}{L} - \frac{P}{L} & -\frac{i(\phi_1 + \phi_2)}{L} & 0 \\ & & & & & i\phi_1 \end{bmatrix}$$

对称

杆单元的平衡方程:

$$\{F\} = [T]^T [k_s] [T] \{w\} - [T]^T \{S_s\} \quad (44)$$

7 材料非线性

本文只讨论塑性集中在某一区域的塑性铰法。对于常用的工字形截面, 塑性铰承载力由下式表达

$$M_{PC} = M_P \quad \frac{|P|}{P_y} \leq 0.15 \quad (45)$$

$$M_{PC} = 1.18 \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) M_P \quad \frac{|P|}{P_y} > 0.15 \quad (46)$$

杆件的弹性切线刚度矩阵可对弹性矩阵进行自由度释放求得, Euler法的弹性增量平衡方程由下式给出

$$\{\Delta F\} = [C]^T [K_{e,p}] [C] \{\Delta w\} + [C]^T \{\Delta F_p\} \quad (47)$$

其弹塑性切线刚度阵 $[K_{e,p}]$ 和伪拟力 $[\Delta F_p]$ 为:

杆A端塑性, B端弹性

$$[K_{e,p}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{L_f} + \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & 0 & -a_{11} & -\frac{a_{12}}{L_f} - \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & a_{12} \\ & \frac{a_{13}}{L_f^2} - \frac{P}{L_f} & 0 & -\frac{a_{12}}{L_f} - \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & -\frac{a_{13}}{L_f^2} + \frac{P}{L_f} & \frac{a_{13}}{L_f} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{11} & \frac{a_{12}}{L_f} + \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & -a_{12} \\ & & & & \frac{a_{13}}{L_f^2} - \frac{P}{L_f} & -\frac{a_{13}}{L_f} \\ & & & & & a_{13} \end{bmatrix}$$

对称

(48)

$$\{\Delta F_p\}^T = \Delta M_{PC} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{D_1}{i\phi_1} & \frac{\phi_1 + \phi_2}{\phi_1 L_f} & 1 & -\frac{D_1}{i\phi_1} - \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{\phi_1 L_f} \frac{\phi_2}{\phi_1} \end{array} \right\} \quad (49)$$

杆 A 端弹性, B 端塑性

$$[K_{ep}] = \left[\begin{array}{cccccc} a_{21} \frac{a_{22}}{L_f} + \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & a_{22} & -a_{21} & -\frac{a_{22}}{L_f} - \frac{(M_A + M_B)}{L_f^2} & 0 & 0 \\ \frac{a_{23}}{L_f^2} - \frac{P}{L_f} & \frac{a_{23}}{L_f} - \frac{a_{22}}{L_f} - \frac{(M_A + M_B)}{L_f^2} & -\frac{a_{23}}{L_f} + \frac{P}{L_f} & -\frac{a_{23}}{L_f} + \frac{P}{L_f} & 0 & 0 \\ a_{23} & -a_{22} & -\frac{a_{23}}{L_f} & -\frac{a_{23}}{L_f} & 0 & 0 \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{L_f} + \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & a_{21} & \frac{a_{22}}{L_f} + \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & 0 & 0 \\ \text{对称} & & & \frac{a_{22}}{L_f^2} - \frac{P}{L_f} & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{array} \right] \quad (50)$$

$$\{\Delta F_f\}^T = \Delta M_{PC} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{D_2}{i\phi_1} & \frac{\phi_1 + \phi_2}{\phi_1 L_f} & \frac{\phi_2}{\phi_1} & -\frac{D_2}{i\phi_1} - \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{\phi_1 L_f} \frac{\phi_2}{\phi_1} \end{array} \right\} \quad (51)$$

杆 A 端塑性, B 端塑性

$$[K_{ep}] = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{EA}{L} - a_{31} & \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & 0 & -\left(\frac{EA}{L} - a_{31}\right) & -\frac{M_A + M_B}{L_f^2} & 0 \\ -\frac{P}{L_f} & 0 & -\frac{M_A + M_B}{L_f^2} & \frac{P}{L_f} & \frac{P}{L_f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{EA}{L} - a_{31} & \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & \frac{M_A + M_B}{L_f^2} & 0 \\ \text{对称} & & & -\frac{P}{L_f} & -\frac{P}{L_f} & 0 \\ & & & & & 0 \end{array} \right] \quad (52)$$

$$\{\Delta F_p\}^T = \Delta M_{PC} \left\{ \begin{array}{cccc} a_{32} & \frac{2}{L_f} & 1 & -a_{32} - \frac{2}{L_f} \end{array} \right\} \quad (53)$$

式 (48) - (53) 中的一些参数值为

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{EA}{L} - \frac{D_1^2}{i\phi_1} \\ a_{12} &= D_2 - \frac{D_1\phi_2}{\phi_1} \\ a_{13} &= i \left(\frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{\phi_1} \right) \end{aligned}$$

$$a_{21} = \frac{EA}{L} - \frac{D_2^2}{i\phi_1}$$

$$a_{22} = D_1 - \frac{D_2\phi_2}{\phi_1}$$

$$a_{23} = a_{13}$$

$$a_{31} = \frac{D_1^2\phi_1 - 2\phi_2 D_1 D_2 + \phi_1 D_2^2}{i(\phi_1^2 - \phi_2^2)}$$

$$a_{32} = \frac{D_1 + D_2}{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

M_A , M_B 和 P 的值由式(5a)决定, ΔM_{PC} 是塑性铰抵抗力矩随轴力变化的增量。

求解方法: 在塑性铰出现前本文用修正的牛顿法求解, 塑性出现后用增量法结合牛顿法求解直到框架的总刚矩阵的行列式的值很小或成为负值, 或前后二次迭代求解的位移值变得十分混乱为止, 这时的外荷载总和定义为框架的极限承载力。

算例1 图5给出了一个四层钢框架, 其一阶极限承载力 $P_u = 214\text{kN}$, 破坏时的顶层节点水平最大侧移 $\Delta = 38\text{cm}$ 。对于 $S = 0.5$ 的一组荷载, 其二阶极限承载力 $P_u = 202\text{kN}$, 破坏时的最大水平侧移值 $\Delta = 22.7\text{cm}$ 。对于 $S = 3$ 的一组荷载, 柱中的轴力增大了几倍, 其一阶承载力没有改变。而二阶极限承载力 $P_u = 152\text{kN}$, 破坏时的最大水平侧移 $\Delta = 7.2\text{cm}$ 。每组荷载下的工作性能见图6和图7。

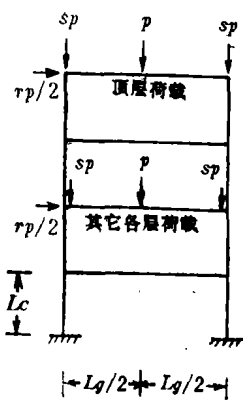


图 5

梁 $W 16 \times 40$
 底层柱 $W 12 \times 79$
 其它各层柱 $W 10 \times 60$
 $L_c = 3.66\text{m}$ $L_g = 9.15\text{m}$
 $E = 2.01 \times 10^6 \text{kN/mm}^2$
 $F_y = 236 \text{kN/mm}^2$

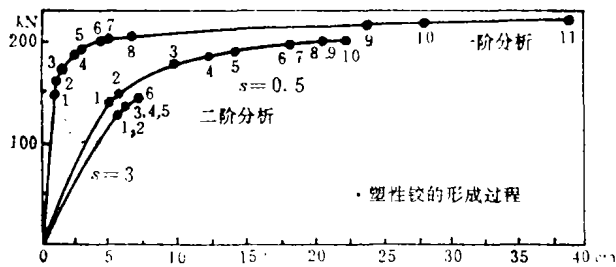


图 6 四层框架的荷载—顶层节点侧移曲线

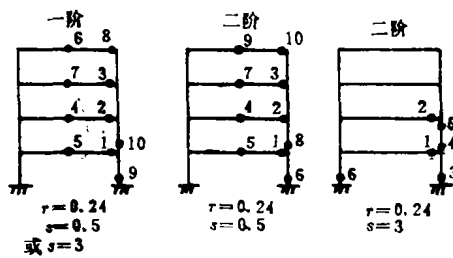


图 7 塑性铰的位置和形成顺序

算例2 图8是一个十五层的钢框架。对于 $S = 0.5$ 和 $S = 3$ 的两组荷载, 一阶分析的极限荷载值 $P_u = 159\text{kN}$, 水平最大侧移值 $\Delta = 275\text{cm}$ 。对于 $S = 0.5$ 时的一组荷载, 二阶分析极限荷载值 $P_u = 125\text{kN}$, 最大水平侧移值 $\Delta = 119\text{cm}$ 。当 $S = 3$ 时, $P_u = 74.76\text{kN}$, 最大水平侧移值

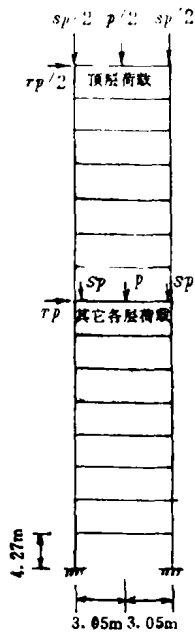


图 8

层数	柱	梁
1	W 14 × 136	W 18 × 96
2	W 14 × 127	W 16 × 96
3	W 14 × 111	W 16 × 88
4	W 14 × 111	W 14 × 84
5	W 14 × 111	W 14 × 78
6	W 14 × 74	W 14 × 74
7	W 14 × 61	W 14 × 61
8	W 14 × 84	W 14 × 61
9	W 12 × 58	W 12 × 53
10	W 12 × 50	W 12 × 45
11	W 12 × 40	W 12 × 36
12	W 10 × 39	W 12 × 36
13	W 10 × 39	W 12 × 28
14	W 8 × 28	W 10 × 26
15	W 8 × 17	W 8 × 21

$$E = 2.01 \times 10^5 \text{ kN/mm}^2$$

$$F_y = 248 \text{ kN/mm}^2$$

$\Delta = 68\text{cm}$ ，每组荷载下的荷载侧移曲线和塑性铰形成过程见图 9 和图 10。

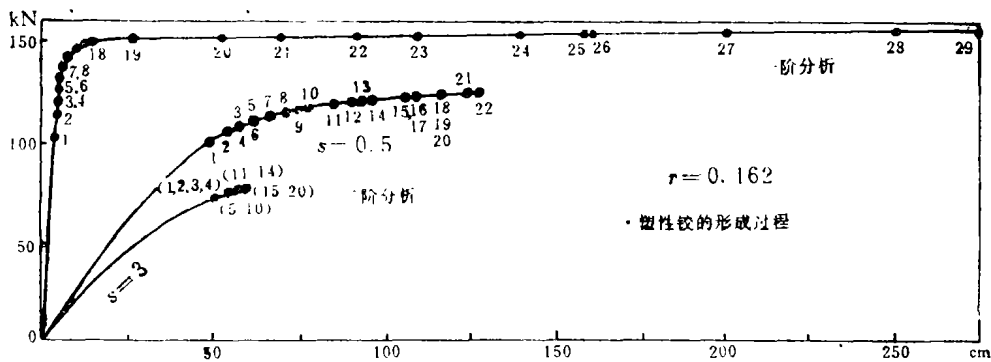


图 9 十五层框架的荷载—顶层节点侧移曲线

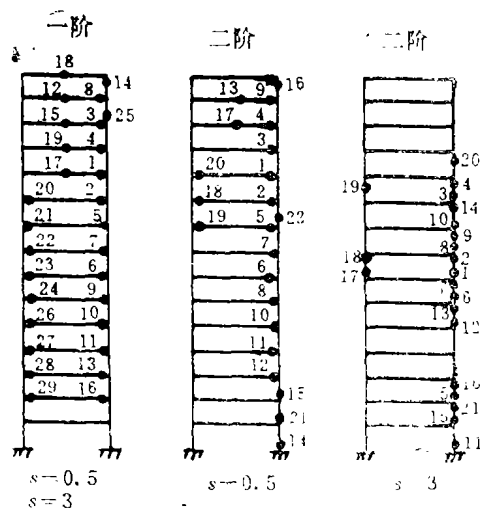


图10 塑性铰的位置和形成顺序

9 结语

本文归纳了各种坐标系下的增量平衡方程。并利用建立的弹塑性切线刚度矩阵编制了计算机程序,该程序能计算多层钢框架和高层钢框架的极限承载力。

参 考 文 献

- 1 C. Oran, Tangent Stiffness in Plane Frames, J. of the structural Division, ASCE, ST6, 1973
- 2 E.M. Lui & W.F. Chen, Analysis and Behavior of Flexibly Jointed Frames, Engng. Struct., Vol.8, April 1986

(编辑: 徐维森)

NONLINEAR RESPONSE STUDIES OF TALL STEEL FRAMES

Liu Xiaoqiang Wu Huibi

(Department of Civil Engineering)

ABSTRACT Considerable effects of geometric nonlinearity upon tall steel frames and flexibly jointed steel frames are recognized. Systematic analysis philosophy of geometric nonlinearity under various coordinate systems and its corresponding explicit expression of tangent stiffness

matrices are comprehensively embodied. The entries in tangent stiffness matrices with its nonlinear behavior and its abstrusely implied physic meanings are expounded and a straight forward derivation technique of nonlinear matrices is given. A computer algorithm which can perform whole range studies of steel frames by considering geometric and material nonlinearities up to the ultimate load carrying capacity is implemented.

KEY WORDS geometric nonlinearity, material nonlinearity, tall steel frames, ultimate strength