

(15)

第14卷第2期  
1992年 6月

重庆建筑工程学院学报  
JOURNAL OF CHONGQING INSTITUTE OF  
ARCHITECTURE AND ENGINEERING

Vol.14 No.2  
June 1992

11-116

研究简报

# 平面铰链连杆机构惯性力矩的质量、 加速度参数方程及模块“装配”平衡算法

宋立权 王炳乐 T1-112.1  
(机电系)

**摘要** 本文对铰接多杆机构惯性力矩的平衡提出了一种具有一般意义的新方法。本方法建立机构惯性力矩表达式容易、概念清晰、求解方便、模块性强，且易于计算机程序化。

**关键词** 机械动力学，机械平衡，惯性力矩平衡 连杆机构，铰链车

机构惯性力矩的平衡问题比惯性力的平衡要复杂得多，而且，到目前为止，对此研究尚不充分。通常的惯性力矩平衡方法是对某具体机构先建立其惯性力矩的表达式，然后利用机构向量回路投影方程式消去相关量并作大量数学变换、整理，从而求得机构惯性力矩平衡或部分平衡的条件。这种方法工作量大、分析计算复杂、并且数学变换和求解过程无规律可循，给机械设计人员带来极大的不便。寻求有一般意义、求解方便、具有模块性且易于计算机编程的平衡方法正是本文的目的所在。

本文首先从单个构件入手，建立其惯性力矩的质量、加速度参数通用模块，然后根据机构的组成依次填入相应模块，得机构总惯性力矩。再由机构约束条件消去相关量，最后由已求得的惯性力平衡条件使各质量参数为零或最小，以及令某些加速度参数为零，求得机构惯性力矩平衡或部分平衡的条件。

## 1 运动构件惯性力矩的质量、加速度参数通用模块

如图1所示，为作平面一般运动的构件，其质量为 $m_j$ ，质心在 $s_j$ 处，构件回转半径为 $k_j$ ，构件长（运动付 $u, v$ 间的距离）为 $a_j$ ，其余参数如图。

该构件对坐标原点的惯性力矩为：

本文1991年6月25日收到。

$$M_{0j} = - \frac{dH_{0j}}{dt} = - m_j (x_{sj} \ddot{y}_{sj} - y_{sj} \ddot{x}_{sj} + k_j^2 \ddot{\varphi}_j) \quad (1)$$

式中:  $H_{0j}$ ——构件对原点的动量矩

$x_{sj}$ 、 $y_{sj}$ ——质心 $s_j$ 的坐标

$\ddot{x}_{sj}$ 、 $\ddot{y}_{sj}$ ——质心 $s_j$ 的加速度分量

$\ddot{\varphi}_j$ ——构件 $J$ 的角加速度

由图 1 可得:

$$\begin{aligned} x_{sj} &= \frac{p_j}{a_j} (x_v - x_u) - \frac{q_j}{a_j} (y_v - y_u) + x_u \\ y_{sj} &= \frac{p_j}{a_j} (y_v - y_u) + \frac{q_j}{a_j} (x_v - x_u) + y_u \end{aligned} \quad (2)$$

上式对时间求两次导数, 得

$$\begin{cases} \ddot{x}_{sj} = \left( 1 - \frac{p_j}{a_j} \right) \ddot{x}_u + \frac{q_j}{a_j} \ddot{y}_u + \frac{p_j}{a_j} \ddot{x}_v - \frac{q_j}{a_j} \ddot{y}_v \\ \ddot{y}_{sj} = \left( 1 - \frac{p_j}{a_j} \right) \ddot{y}_u - \frac{q_j}{a_j} \ddot{x}_u + \frac{q_j}{a_j} \ddot{x}_v + \frac{p_j}{a_j} \ddot{y}_v \end{cases} \quad (3)$$

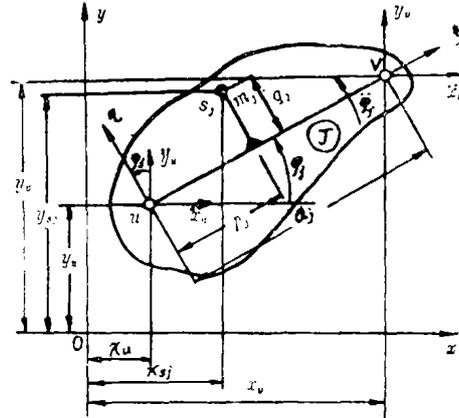


图 1

$$\ddot{\varphi}_j = \frac{a_{vu}^x}{a_j} = \frac{(y_v - y_u) \cos \varphi_j - (x_v - x_u) \sin \varphi_j}{a_j}$$

因  $\cos \varphi_j = \frac{x_v - x_u}{a_j}$        $\sin \varphi_j = \frac{y_v - y_u}{a_j}$

故

$$\ddot{\varphi}_j = \frac{(y_v - y_u)(x_v - x_u) - (x_v - x_u)(y_v - y_u)}{a_j^2} \quad (4)$$

式 (2), (3) 及 (4) 代入式 (1), 经整理并用记号表示, 则

$$M_{0j} = -(M_{uv1} \cdot D_{uv1} + M_{uv2} \cdot D_{uv2} + M_{uv3} \cdot D_{uv3} + M_{uv4} \cdot D_{uv4}) \quad (5)$$

上式称运动构件惯性力矩的质量、加速度参数通用模块。 $M_{uvi}$ 称质量参数,  $D_{uvi}$ 称加速度参数。式中:

$$\begin{aligned} M_{uv1} &= \frac{m_j}{a_j^2} - [(a_j - p_j)^2 + q_j^2 + k_j^2] \\ M_{uv2} &= \frac{m_j}{a_j^2} [a_j p_j - (p_j^2 + q_j^2 + k_j^2)] \\ M_{uv3} &= \frac{m_j q_j}{a_j} \\ M_{uv4} &= \frac{m_j}{a_j^2} (p_j^2 + q_j^2 + k_j^2) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} D_{uv1} &= x_u \ddot{y}_u - y_u \ddot{x}_u \\ D_{uv2} &= x_v \ddot{y}_u + x_u \ddot{y}_v - y_v \ddot{x}_u - y_u \ddot{x}_v \\ D_{uv3} &= y_u \ddot{y}_v + x_u \ddot{x}_v - y_v \ddot{y}_u - x_v \ddot{x}_u \\ D_{uv4} &= x_v \ddot{y}_v - y_v \ddot{x}_v \end{aligned} \quad (7)$$

将式 (4) 拆开并考察式 (7) 中第一、二及第四式，知构件  $J$  角加速度又可表为：

$$\ddot{\varphi}_j = \frac{D_{uv1} + D_{uv4} - D_{uv2}}{a_j^2} \quad (8)$$

上述各式中质量参数  $M_{uvi}$ 、加速度参数  $D_{uvi}$  中下标含义是： $u, v$  表示构件  $J$  上的两个运动付，连在一起又表示构件名称，且  $u$  为局部坐标系的原点， $u \rightarrow v$  为  $u\xi$  轴的正向，第三个数字表示相应参数的编号。

## 2 机构惯性力矩的平衡

为说明本方法的应用，以图 2 所示六杆机构为例，其它多杆机构的平衡方法与之相同。

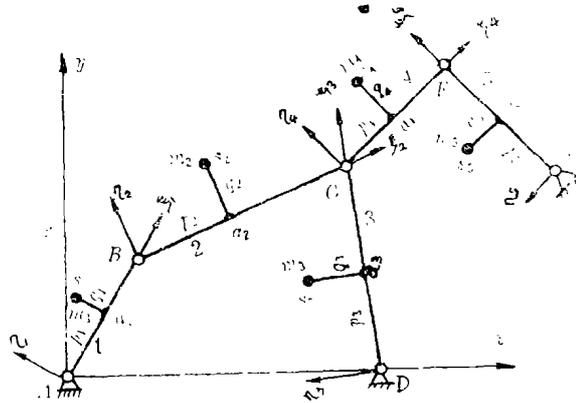


图 2

由式 (5) 易得该机构惯性力矩表达式：

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{j=1}^5 M_{0j} = - \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 M_{uvi} D_{uvi} \\ &= -(M_{AB1} D_{AB1} + M_{AB2} D_{AB2} + M_{AB3} D_{AB3} + M_{AB4} D_{AB4} \\ &\quad + M_{BC1} D_{BC1} + M_{BC2} D_{BC2} + M_{BC3} D_{BC3} + M_{BC4} D_{BC4} \\ &\quad + M_{CD1} D_{CD1} + M_{CD2} D_{CD2} + M_{CD3} D_{CD3} + M_{CD4} D_{CD4} \\ &\quad + M_{CE1} D_{CE1} + M_{CE2} D_{CE2} + M_{CE3} D_{CE3} + M_{CE4} D_{CE4} \\ &\quad + M_{FE1} D_{FE1} + M_{FE2} D_{FE2} + M_{FE3} D_{FE3} + M_{FE4} D_{FE4}) \end{aligned} \quad (9)$$

由图 2 知： $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B, \ddot{x}_D, \ddot{y}_D, \ddot{x}_F, \ddot{y}_F$  均为零，故由式 (7)

$$D_{AB1} = D_{AB2} = D_{AB3} = D_{DC1} = D_{FE1} = 0 \quad (10)$$

构件 1, 2 于 B，构件 2, 3, 4 于 C 以及构件 4, 5 于 E 构成转动付。各构件上局部坐标如图 2 示，故：

$$\left. \begin{aligned} D_{AB4} &= D_{BC1} & D_{CE4} &= D_{FE4} \\ D_{BC4} &= D_{DC4} & & \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式 (10)，(11) 代入式 (9) 并整理，得：

$$M_0 = -[(M_{AB4} + M_{BC1})D_{AB4} + M_{BC2}D_{BC2} + M_{BC3}D_{BC3}$$

$$\begin{aligned}
& + (M_{BC_4} + M_{DC_4} + M_{CE_1})D_{DC_4} + M_{DC_2}D_{DC_2} + M_{DC_3}D_{DC_3} \\
& + M_{CE_2}D_{CE_2} + M_{CE_3}D_{CE_3} + (M_{CE_4} + M_{FE_4})D_{FE_4} \\
& + M_{FE_2}D_{FE_2} + M_{FE_3}D_{FE_3} ] \quad (12)
\end{aligned}$$

为使机构惯性力矩平衡, 应使  $M_0 = 0$  或尽可能为最小, 即应使  $M_0$  等号右边各项为零或最小。借助 (7) 式中第三式并考察式 (12) 中加速度参数  $D_{BC_3}$  及  $D_{CE_3}$ , 知:

$$\begin{aligned}
D_{BC_3} &= y_B \ddot{y}_C + x_B \ddot{x}_C - y_C \ddot{y}_B - x_C \ddot{x}_B \\
D_{CE_3} &= y_C \ddot{y}_E + x_C \ddot{x}_E - y_E \ddot{y}_C - x_E \ddot{x}_C
\end{aligned}$$

由图 2 知: 构件  $BC$ ,  $CE$  均为作平面复杂运动的构件, 运动付  $B$ 、 $C$  处  $x$  及  $y$  方向的加速度均不为零。即  $D_{BC_3} \neq 0$ ,  $D_{CE_3} \neq 0$ , 故只能

$$M_{BC_3} = m_2 \frac{q_2}{a_2} = 0 \quad M_{CE_3} = m_4 \frac{q_4}{a_2} = 0$$

$m_2$ ,  $m_4$  为质量,  $a_2$ ,  $a_4$  为构件长, 均不为零。于是有:

$$q_2 = q_4 = 0 \quad (13)$$

由文献 [1] 惯性力平衡方法求得图 2 机构惯性力平衡条件为:

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{q_1}{a_1} - m_2 \frac{q_2}{a_2} &= 0 \\
m_4 \frac{q_4}{a_4} + m_5 \frac{q_5}{a_5} &= 0 \\
m_2 \frac{q_2}{a_2} + m_3 \frac{q_3}{a_3} - m_4 \frac{q_4}{a_4} &= 0 \\
m_1 \frac{p_1}{a_1} + m_2 \frac{a_2 - p_2}{a_2} &= 0 \\
m_2 \frac{p_2}{a_2} + m_3 \frac{p_3}{a_3} + m_4 \frac{a_4 - p_4}{a_4} &= 0 \\
m_4 \frac{p_4}{a_4} + m_5 \frac{p_5}{a_5} &= 0
\end{aligned} \quad (14)$$

由式 (13) 并考察上式中前三式, 知

$$q_1 = q_3 = q_5 = 0 \quad (15)$$

故  $M_{DC_3} = M_{FE_3} = 0$ , 式 (12) 简化为

$$\begin{aligned}
M_0 &= - [(M_{AB_4} + M_{BC_1})D_{AB_4} + M_{BC_2}D_{BC_2} + M_{DC_2}D_{DC_2} \\
& + (M_{BC_4} + M_{DC_4} + M_{CE_1})D_{DC_4} + M_{CE_2}D_{CE_2} \\
& + (M_{CE_4} + M_{FE_4})D_{FE_4} + M_{CE_2}D_{CE_2}] \quad (16)
\end{aligned}$$

由式 (6) 将各质量参数的具体表达式代入上式, 并由惯性力平衡条件式 (14) 中后三式, 式 (16) 经整理, 则:

$$\begin{aligned}
 M_0 = & - [m_1(p_1^2 + k_1^2 - a_1 p_1) \frac{D_{AB4}}{a_1^2} \\
 & + m_2(p_2^2 + k_2^2 - a_2 p_2) \frac{D_{BC1} + D_{BC4} + D_{BC2}}{a_2^2} \\
 & + m_3(p_3^2 + k_3^2 - a_3 p_3) \frac{D_{DC4} - D_{DC2}}{a_3^2} \\
 & + m_4(p_4^2 + k_4^2 - a_4 p_4) \frac{D_{CE1} + D_{CE4} - D_{CE2}}{a_4^2} \\
 & + m_5(p_5^2 + k_5^2 - a_5 p_5) \frac{D_{FE4} - D_{FE2}}{a_5^2}] \quad (17)
 \end{aligned}$$

由图2知：回转件A处于坐标原点， $x_A = 0$   $y_A = 0$ 。D点在x轴上， $y_D = 0$ 。A, D, F为固定铰，即 $\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_D, \ddot{y}_D, \ddot{x}_F, \ddot{y}_F$ 均为零。

将上述相应构件的位置坐标及加速度分别代入式(7)，并由式(8)得各可动构件角加速度的加速度参数表达为：

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_1 &= \frac{D_{AB4}}{a_1^2} & \ddot{\varphi}_2 &= \frac{D_{BC1} + D_{BC4} - D_{BC2}}{a_2^2} & \ddot{\varphi}_3 &= \frac{D_{DC4} - D_{DC2}}{a_3^2} \\
 \ddot{\varphi}_4 &= \frac{D_{CE1} + D_{CE4} - D_{CE2}}{a_4^2} & \ddot{\varphi}_5 &= \frac{D_{FE4} - D_{FE2}}{a_5^2}
 \end{aligned}$$

于是，式(17)具有物理意义更明确的直观表达：

$$\begin{aligned}
 M_0 = & - [m_1(p_1^2 + k_1^2 - a_1 p_1) \ddot{\varphi}_1 + m_2(p_2^2 + k_2^2 - a_2 p_2) \ddot{\varphi}_2 \\
 & + m_3(p_3^2 + k_3^2 - a_3 p_3) \ddot{\varphi}_3 + m_4(p_4^2 + k_4^2 - a_4 p_4) \ddot{\varphi}_4 \\
 & + m_5(p_5^2 + k_5^2 - a_5 p_5) \ddot{\varphi}_5] \quad (18)
 \end{aligned}$$

式(18)是惯性力已完全平衡即满足式(13)，(14)，(15)的惯性力矩表达式。为使惯性力矩完全平衡，即 $M_0 = 0$ ，机构可设计成如下形式。

1) 构件长  $a_1 = a_3 = a_5$ ， $a_2 = a_{AD}$ ， $a_4 = a_{DF}$ ，主动件作匀角速转动，有

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3 = \ddot{\varphi}_4 = \ddot{\varphi}_5 = 0.$$

2) 构件长  $a_1 = a_3 = a_{DF}$ ， $a_2 = a_{AD}$ ， $a_4 = a_5$  构件1作匀角速转动，有 $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_3 = 0$ ， $\ddot{\varphi}_4 = -\ddot{\varphi}_5$ ，各 $p_i$  ( $i = 1 \sim 5$ ) 满足式(14)中后三式，且 $m_4(p_4^2 + k_4^2 - a_4 p_4) = m_5(p_5^2 + k_5^2 - a_5 p_5)$ 。

3) 构件1匀角速转动，即 $\ddot{\varphi}_1 = 0$ 。构件2长度满足 $a_2 = \frac{p_2^2 + k_2^2}{p_2}$ ，构件4长度满足 $a_4 = \frac{p_4^2 + k_4^2}{p_4}$ ，机构剩余惯性力矩 $M_0 = - [m_3(p_3^2 + k_3^2 - a_3 p_3) \ddot{\varphi}_3 + m_5(p_5^2 + k_5^2 - a_5 p_5) \ddot{\varphi}_5]$ 。

该剩余惯性力矩可由平衡机构来平衡。

实际机械中通常采用的是惯性力和力矩的部分平衡，可由文献[1]求出惯性力的平衡条件，由本方法求出形如式(18)的表达式，利用优化方法求得部分平衡的最佳方案。

## 4 结束语

本方法对由二回转付构件组成的杆机构进行惯性力矩平衡时, 惯性力矩的表示及平衡条件求解简单方便、规律性强, 与[2]的方法相比, 避免了繁杂的数学推导及变换, 且工作量小, 不易出错。特别是在处理多杆机构的惯性力矩平衡问题时更显示其优点。又由于机构惯性力矩表达式是由单个构件质量、加速度参数模块, 根据机构的连接“装配”而成, 故本方法具有一般意义且易于计算机程序化。

### 参 考 文 献

- 1 王炳乐、宋立权. 机构惯性力平衡的质量、加速度参数法. 重庆建工学院学报, 1988(2), p65
- 2 唐锡宽、金德闻. 机械动力学. 高等教育出版社, 1983

(编辑: 刘家凯)

## A NEW METHOD BY USE OF MASS AND ACCELERATION PARAMETERS FOR BALANCING THE SHAKING MOMENT OF ARTICULATED MULTI-BAR LINKAGES

*Song Liqun Wang Bingle*

(Dept. of Mechanical and Electrical Engineering)

**ABSTRACT** In this paper, a new method with general purpose is presented for balancing the shaking moment of articulated multi-bar linkage. The concept of this method is clear. The moment equation of linkages is easy to establish and solve. Furthermore its pattern structure makes it convenient to be programmed.

**KEY WORDS** dynamics of machine, balance of machine, balance of shaking moment