

3

17-24

## ARMA模型及参数识别技术 在脉动风仿真中的应用\*

李英民 赖明<sup>√</sup> 赵青

(建筑工程系)

TU 973.213

**摘要** 随着高层建筑、高耸结构及悬索结构等相对较柔的结构物在工程中日益广泛使用,结构物在脉动风作用下的响应分析愈来愈受到工程界的重视,有效地给出具有一定统计规律的脉动风记录对结构风振分析及工程抗振设计都是十分必要的。本文研究了采用自回归滑动平均 (ARMA) 模型和参数识别技术模拟给定条件 (如功率谱或某种统计特征) 的脉动风记录的计算机仿真方法。结果表明,本文提出的模拟方法是一种有效的脉动风仿真方法。

**关键词** 自回归滑动平均模型, 参数识别, 脉动风, 仿真

高层建筑

ARMA模型

计算机技术的日益提高,促进了随机荷载作用下结构物动力时程分析方法的发展。由于随机振动理论的深入研究以及工程界对脉动风这种随机激励对结构危害的日益重视,随机振动方法在结构风振分析中正在得到广泛的应用,结构物的风效应分析也逐渐由静力方法向动力方法过渡。进行结构时程分析,首要问题即是确定结构输入。仅仅依靠已有的记录和观测作为输入显然是不现实的,也是不切实际的,人工模拟结构随机输入不仅可以满足某些统计特性的任意性,而且比单一实际记录更具有代表性和统计性,因而被广泛采用。近年来,地震工程界在人造地震动方面做了大量的工作,而且人造地震波已大量地用于地震荷载作用下的结构动力分析中。同样地,结构随机风振理论的发展也将迫切要求人造风记录。而且,就风效应分析本身而言,也同样需要获得大量的满足某种给定条件的风记录。

近年来,自回归滑动平均 (ARMA) 模型已被广泛用于时间序列的分析中。许多资料表明,这种模型的确是处理工程随机过程的一种很好的模型。本文提出了采用 ARMA 模型,利用参数识别技术产生拟合某种给定功率谱的水平风速记录的计算机模拟方法。

本文1991年10月11日收到。

\* 本项目得到国家自然科学基金资助。

## 1 自回归滑动平均(ARMA)模型

描述平稳随机过程的数学模型相当繁多, 对于一般的线性过程常可用差分方程表示为:

$$X_t + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_n X_{t-n} = b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_m \varepsilon_{t-m}$$

即: 
$$X_t + \sum_{i=1}^n a_i X_{t-i} = \sum_{i=0}^m b_i \varepsilon_{t-i} \quad (1)$$

式中:  $\{X_t\}$  为平稳随机时间序列, 具有零均值;

$\{\varepsilon_t\}$  为纯随机过程, 亦即白噪声过程;

$a_i, b_i$  为系数。

此时称  $\{X_t\}$  为  $n$  阶自回归  $m$  阶滑动平均过程, 记为 ARMA( $n, m$ )。并称  $a_i$  为自回归系数,  $b_i$  为滑动平均系数,  $n$  为自回归阶数,  $m$  为滑动平均阶数。

不失一般性, 取  $b_0 \equiv 1$ , 得到工程上常用的表达式:

$$X_t + \sum_{i=1}^n a_i X_{t-i} = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^m b_i \varepsilon_{t-i} \quad (2)$$

为方便起见, 引入时移算子  $B$ :  $B^i X_t = X_{t-i}$

可将 (2) 式写为:

$$\Phi(B) X_t = \Theta(B) \varepsilon_t \quad (3)$$

其中:

$$\Phi(B) = 1 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_n B^n$$

$$\Theta(B) = 1 + b_1 B + b_2 B^2 + \dots + b_m B^m$$

基于上述定义, 下面对 ARMA( $n, m$ ) 过程做简要讨论:

### 1.1 两个特例

若系数  $a_i$  不全为零而  $b_i$  全为零, 即  $\Theta(B) = 1$ , 则:

$$X_t + \sum_{i=1}^n a_i X_{t-i} = \varepsilon_t, \text{ 即 } \Phi(B) X_t = \varepsilon_t \quad (4)$$

称  $\{X_t\}$  为  $n$  阶自回归过程 AR( $n$ )。从定义可知, 过程当前时刻的值与其前  $n$  个时刻的值线性相关, 即是说当前时刻的值可线性回归到其前  $n$  个时刻的值, 而  $a_i$  则相当于不同时刻值的贡献程度。

相反地, 若系数  $b_i$  不全为零而  $a_i$  全为零, 即  $\Phi(B) = 1$ , 则:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^m b_i \varepsilon_{t-i}, \text{ 即 } X_t = \Theta(B) \varepsilon_t \quad (5)$$

称  $\{X_t\}$  为  $m$  阶滑动平均过程 MA( $m$ )。由 (5) 式可见, 过程当前时刻的值可表示为白噪声输入当前值和有限范围内过去值的加权平均, 而  $b_i$  则相当于加权系数。

### 1.2 平稳、可逆条件

ARMA( $n, m$ ) 的平稳与可逆条件分别由自回归系数和滑动平均系数决定, 可由  $\Phi(B) = 0$  和  $\Theta(B) = 0$  的根是否全部在  $B$  平面单位圆之外来判断。对于较低阶的 ARMA( $n, m$ ) 过程, 其稳定性和可逆性可通过求解方程的根直接得出, 更方便的是根据方程根与系数的关系, 将平

稳条件、可逆条件转换为由系数  $a_i, b_i$  表示的显式形式。而对高阶的自回归滑动平均过程, 可由朱利 (Jury) 准则来判定, 参见文献[2]。

### 1.3 三种表达形式

除了差分方程的形式以外, ARMA( $n, m$ )过程还有另外两种表达形式: 在平稳条件下, 由(3)式可得

$$X_t = \Phi^{-1}(B)\Theta(B)\varepsilon_t = G(B)\varepsilon_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty} G_i B^i\right)\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \varepsilon_{t-i} \quad (6)$$

此式称为  $\{X_t\}$  的传递形式。其中系数  $\{G_i\}$  称为格林函数, 亦即传递函数。

在可逆条件下, 由(3)式还可得到

$$\varepsilon_t = \Theta^{-1}(B)\Phi(B)X_t = I(B)X_t = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} I_i B^i\right)X_t \quad (7)$$

此式称为  $\{X_t\}$  的逆转形式。其中  $\{I_i\}$  称为逆函数。

### 1.4 统计特性

由(6)式, 注意到白噪声过程的自相关函数  $R\varepsilon(r) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \delta(r)$ , 可得 ARMA 过程的自相关函数:

$$R_x(r) = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_{i+r} \quad (8)$$

因平稳条件下  $G_i$  呈负指数衰减, 故  $R_x(r)$  也必定是负指数衰减的。

根据自相关函数与功率谱密度的关系, 可得 ARMA 过程的功率谱密度函数为:

$$G_x(f) = \sigma_\varepsilon^2 \left| \Theta(B)/\Phi(B) \right|_{B=e^{j2\pi f}}^2, \quad -1/2 \leq f \leq 1/2$$

即:

$$G_x(f) = \sigma_\varepsilon^2 \left| \frac{1 + b_1 \exp(-j2\pi f) + \dots + b_m \exp(-j2\pi m f)}{1 + a_1 \exp(-j2\pi f) + \dots + a_n \exp(-j2\pi n f)} \right|^2, \quad -1/2 \leq f \leq 1/2 \quad (9)$$

可见 ARMA( $n, m$ ) 过程具有有理谱密度。

通过以上分析, ARMA 过程可看成是由白噪声过程通过一个有理函数  $\Theta(B)/\Phi(B)$  的滤波器而产生的输出 (如图 1), 它足以描述工程中相当大范围的随机序列, 特别是其形式简单, 仅需几个参数就可完全确定模型及其特性, 因此本文选用 ARMA 模型来描述脉动风。

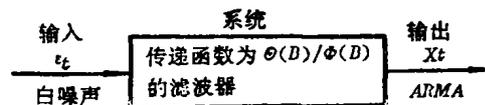


图 1 ARMA 过程示意

## 2 参数识别技术在脉动风仿真的应用

目前, 国内外对于脉动风的研究都是基于将其作为各态历经的平稳随机过程的假定的, 这种假定足以满足工程精度要求。在这一基础上, 本文采用 ARMA 模型拟合某一给定统计特性的脉动风过程。首先将某一给定功率谱与 ARMA 过程的功率谱之间的参差  $e^2$  作为目标函数,  $e^2$  显然是 ARMA 过程的系数  $A_i(a_i, b_i)$  的函数  $e^2 = f(A_i)$ , 这样问题就转化为求  $e^2$  在

系数  $A_i$  满足约束条件下的极小化问题。然后通过参数识别中非线性约束优化的复合形方法来完成参数  $A_i$  等的迭代调整, 直至满足精度要求 (见图 2)。

复合形方法也是参数识别技术中常用的方法之一。其基本原理是: 在非线性约束的  $n$  维参数空间内, 取  $2n$  个顶点构成复形, 然后对复形的各顶点函数值逐一比较, 不断地丢掉最坏点, 代之以既能使目标函数有所改进, 又满足约束条件的新点, 逐步调向最优点 (见图 3)。

### 3 结果及简要分析

应用 ARMA 模型和参数识别技术, 作者编制了脉动风仿真程序 LUNF, 并在 COMA Q-386 机上调试通过。程序 LUNF 可用于仿真拟合任一给定目标谱的脉动风记录, 亦可直接给出确定模型参数的脉动风记录。且本程序已与 AUTOCAD 接口, 可直接将结果以图形输出。

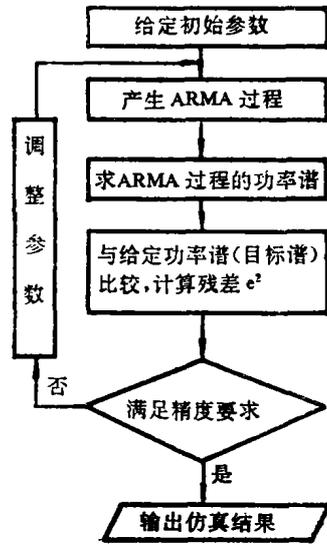


图 2 脉动风仿真程序框图

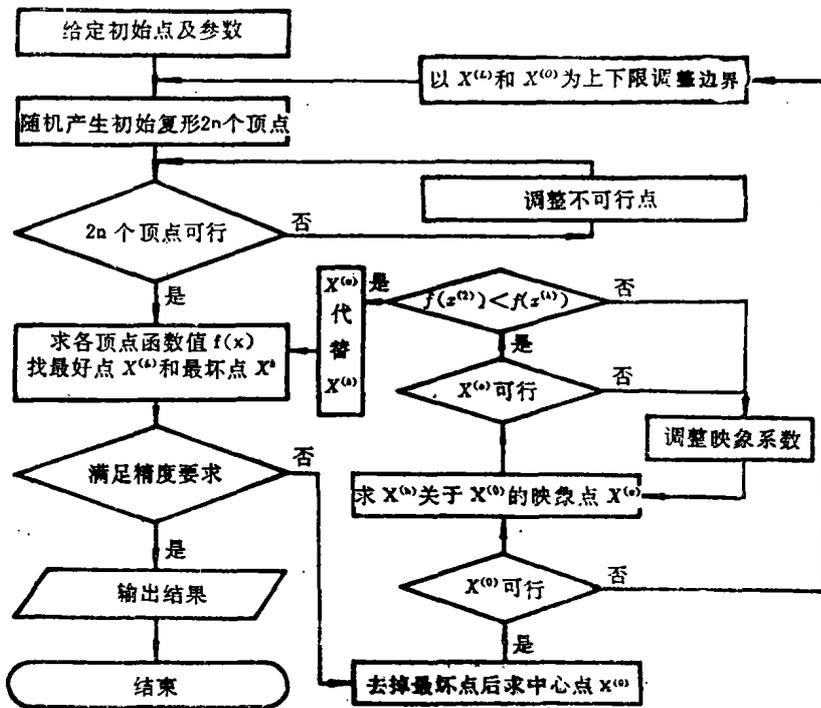


图 3 复合形优化方法程序框图

使用程序 LUNF, 本文首先研究了脉动风 ARMA 模型的初步定阶。表 1 给出了某一给定功率谱的脉动风仿真过程中的残差和迭代次数。从中可见, 用较低阶的 ARMA 模型, 如

ARMA(1,1)或 ARMA(2,1), 即可较好地模拟脉动风过程。而高阶的 ARMA 模型反而使计算时间增长, 且精度并未显著提高。

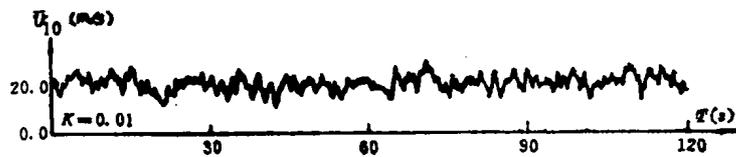
表1 ARMA模型的定阶

模 型	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(3,1)	ARMA(4,1)	ARMA(4,2)
残 差 $e^2$	11.84037	11.88527	17.33872	22.98826	24.83146
迭 代 次 数	141	403	342	401	402

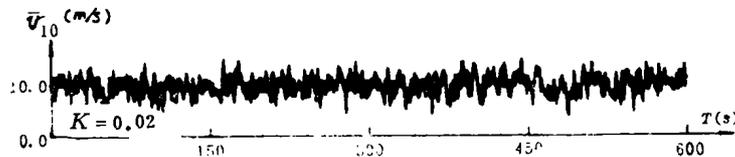
应用低阶ARMA模型, 本文对具有以下两种功率谱的脉动风分别进行了模拟:

1) Davenport 提出的脉动风速谱:

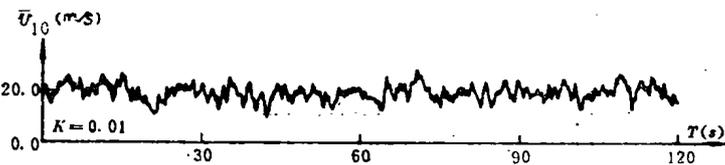
$$S_v(f) = 4K \bar{v}_{10}^2 X^2 / [2\pi f(1 + X^2)^{4.75}] \quad (10)$$



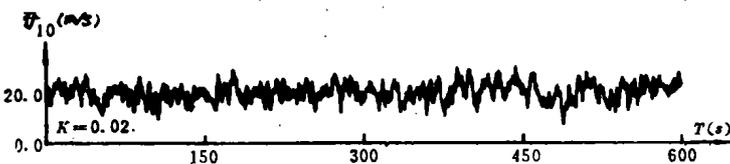
a) 拟合Davenport谱的脉动风记录 I-1



b) 拟合Davenport谱的脉动风记录 I-2



c) 拟合Davenport谱的脉动风记录 III-3



d) 拟合Davenport谱的脉动风记录 V-4

图4 拟合Davenport谱的脉动风记录

2) 我国实测资料的经验曲线:

$$S_v(f) = 1.611K \bar{v}_{10}^2 \exp[-(\lg X - 0.61)^2 / 0.5408] / (2\pi f) \quad (11)$$

式(10)和(11)中

$\bar{v}_{10}$ ——10米高度处平均风速, 单位m/s。本文取10.0m/s和20.0m/s两种情况。

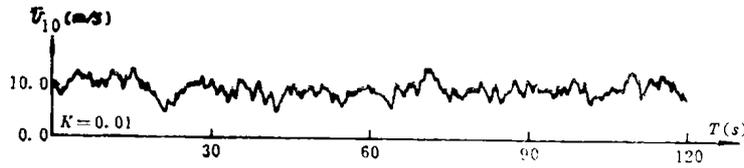
K——系数, 本文按文献[1]取K=0.01和K=0.02

X—— $X = 1200 \sqrt{2\pi f} / \bar{v}_{10}$

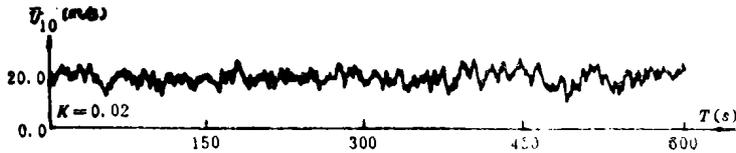
$f$ ——圆频率, 单位cps

分析中本文取脉动风记录持时为120s和600s两种情形。

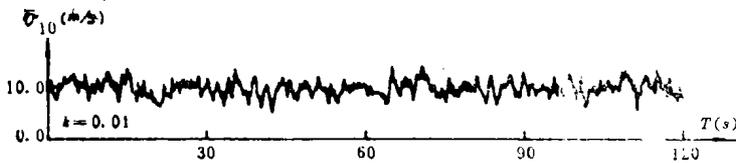
图4, 图5分别给出了拟合Davenport谱和我国经验谱的四条脉动风记录。



a) 拟合我国经验谱的脉动风记录 I-5



b) 拟合我国经验谱的脉动风记录 II-6

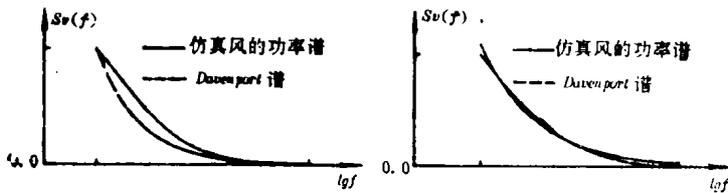


c) 拟合我国经验谱的脉动风记录 III-7



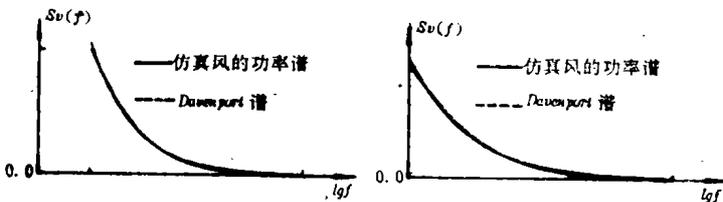
d) 拟合我国经验谱的脉动风记录 IV-8

图5 拟合我国经验谱的脉动风记录



a) I-1 的功率谱

b) II-2 的功率谱



c) III-8 的功率谱

d) IV-4 的功率谱

图6 脉动风记录(拟合Davenport谱)的功率谱

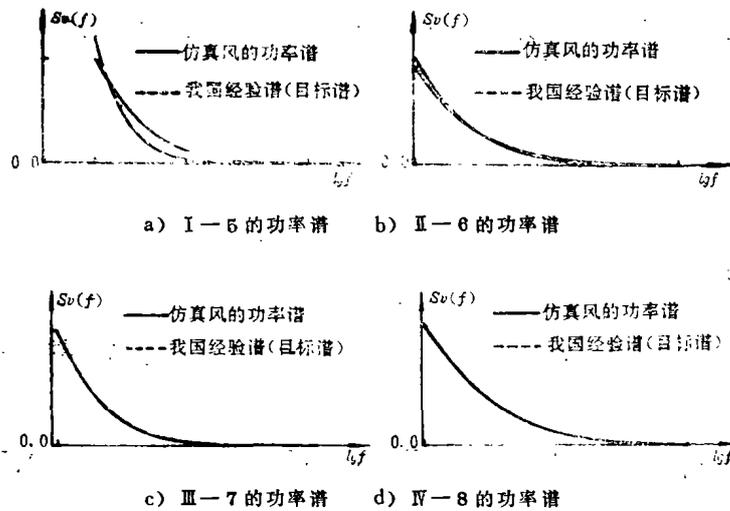


图7 脉动风记录(拟合我国经验谱)的功率谱

图6, 图7分别给出了以上八条脉动风记录的相应功率谱。

表2给出了用ARMA(1,1)模拟图4c)所示脉动风记录过程中残差变化情况, 从中可以看出本文提出的方法是有效的。

表2 ARMA(1,1)模拟III-3过程中的残差变化情况

残差变化次数	1	2	3	4	5	6
对应迭代次数	5	9	11	19	22	43
残差平方和 $e^2$	15789.51	12854.00	3355.766	1873.330	539.9734	524.6740
残差变化次数	7	8	9	10	11	12
对应迭代次数	45	56	65	88	90	97
残差平方和 $e^2$	107.3202	42.5605	31.7907	29.55672	19.22375	16.60683
残差变化次数	13	14	15	16	17	18
对应迭代次数	108	118	120	130	134	141
残差平方和 $e^2$	13.98271	13.16089	12.44773	12.36551	12.17138	11.91777

大量计算表明, 对任一给定功率谱的脉动风模拟, 一般需用5~20分钟即可识别出最优结果。在模型参数确定以后, 只改变随机数而无需迭代计算即可产生满足同一功率谱的若干条脉动风记录, 仅需机时3~10秒。计算时间与记录所取点数成正比。

#### 4 结语

通过以上计算分析, 可得到如下结论:

- 1) ARMA( $n, m$ )模型是一种描述工程随机过程的很好的模型。在脉动风的仿真中,

用较低阶的ARMA( $n, m$ )模型既可减少计算时间, 又可满足精度要求。

2) 本文提出的脉动风仿真方法是一种省时、实用、行之有效的方法, 可用于对给定某种统计特征或具有确定模型参数的风记录的模拟仿真。

3) 本文提出的仿真方法亦可推广应用于其他随机时间序列(如地震动)的模拟分析中。

### 参 考 文 献

- 1 张相庭. 结构风压和风振计算. 同济大学出版社, 1985.5
- 2 杨位钦, 顾岚. 时间序列分析与动态数据建模. 北京工业大学出版社, 1987.2
- 3 大崎顺彦. 地震动的谱分析入门. 地震工程出版社, 1980.3

(编辑: 徐维森)

## APPLICATION OF ARMA MODEL AND PARAMETER IDENTIFICATION TO SIMULATION OF PULSATING WIND

*Li Yingmin    Lai Ming    Zhao Qing*

(Dept. of Civil Engineering)

**ABSTRACT** With the wide use of tall buildings, highrise structures, suspended structures and some other flexible structures, the analysis of structure responses under pulsating wind has been more and more valued in the field of engineering. It is necessary to effectively give pulsating wind records with certain stochastic characteristics for the analysis of structure responses under winds and the design of anti-vibration structures. Using autoregressive moving average (ARMA) model and technique of parameter identification, this paper studies the method to simulating pulsating winds which are compatible with given factors (such as power spectrum or other stochastic characteristics). The conclusion shows that it is an effective method.

**KEY WORDS** autoregressive moving average (ARMA) model, parameter identification, pulsating wind, simulation