一种缩短自动称重时间的计算方法*

宋寿祥

（机电系）

摘 要 本文讨论了一种旨在提高测重系统测量速度的计算方法。通常的测量方法需待测量读数稳定，才能得到正确的测量值。所讨论的方法只需利用较少数量的测量过程中的暂态值，经计算得到稳定值。仿真结果证明这个方法的有效性并可缩短测量时间约1/3。

关键词 测重系统，稳定值 、时间、计算 滤波器。

1 问题的提出

测重系统有多种型式，应用得较广泛的是电磁式及电阻应变式。测重系统的构成虽有不同的类型，但都有一个共同的要求，即较高的测量精度及测量速度。后者对于连续自动生产线上的测重系统尤其显得重要。

以电阻应变式测重系统为例。当加上被称物体时，会激起测量机构中金属弹性体产生较高频率的振动。因此，信号电流中的高频成分需用低通滤波器滤去。另一方面，除物体本身的重量外，还有加载过程中的额外附加力作用在测量机构上，这是一种不确定的力。所以通常要待读数稳定才能测知被称物体的准确重量。为了提高测量速度，一个途径是缩短这一时间。以下讨论的方法是在排除额外附加力影响的条件下，通过利用有限的过渡过程中的瞬态值，来及早算出稳态值，从而缩短测量时间。

2 用有限个数的瞬态测量值计算稳态值

测量系统中的高频成份由低通滤波器滤去后，可以认为系统是线性的。

系统的线性时不变状态方程如下：

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX \tag{1}$$

式中，U— 输入量，Y— 输出量

X— 状态变量 A,B,C— 系数矩阵

设初始状态 $X(0) = 0$，且 U 为物体固有重量 U_0 及时变的附加力 $\triangle U$ 所组成，故

$$U = U_0 + \triangle U \tag{2}$$

* 本文1992年10月31日收到。

状态方程的输出值：

$$Y=\int_0^t ce^{A(t-\tau)}BU_0\mathrm{d}\tau+\int_0^t ce^{A(t-\tau)}B\triangle U\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

由于系统是稳定的，系数矩阵 A 是正则的，其特征值是实部为负，故有，

$$\int_0^t ce^{A(t-\tau)}BU_0\mathrm{d}\tau=c(e^{At}-I)A^{-1}BU_0 \tag{4}$$

此外，$\triangle U$ 只在有限时刻 $\triangle t$ 出现，故 $t\geqslant\triangle t$ 时，式(3)中的第二项为

$$\int_0^{\triangle t} ce^{A(t-\tau)}B\triangle U(\tau)\mathrm{d}\tau=ce^{At}\int_0^{\triangle t}e^{-A\tau}B\triangle u(\tau)\mathrm{d}\tau=ce^{At}d \tag{5}$$

式中　$d=\int_0^{\triangle t}e^{-A\tau}B\triangle U(\tau)\mathrm{d}\tau$

如采样周期为 T，各采样时刻为 $t_0,t_1,\cdots\cdots,t_n$ 则

$$T=t_i-t_{i-1}\qquad i=1,2,\cdots\cdots,n,$$

t_i 时刻的输出值为：

$$y_i=c(e^{At_i}-I)A^{-1}BU_0+ce^{At_i}d \tag{6}$$

$$i=0,1,\cdots\cdots n$$

由此可得：

$$y_0+CA^{-1}BU_0=ce^{At_0}(A^{-1}BU_0+d)$$
$$y_1+CA^{-1}BU_0=ce^{AT}e^{At_0}(A^{-1}BU_0+d)$$
$$y_{n-1}+CA^{-1}BU_0=ce^{(n-1)AT}e^{At_0}(A^{-1}BU_0+d)$$
$$y_n+CA^{-1}BU_0=ce^{nAT}e^{At_0}(A^{-1}BU_0+d) \tag{7}$$

设 e^{AT} 的特征多项式为

$$det(\lambda I-e^{AT})=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\lambda+a_0 \tag{8}$$

则
$$e^{nAT}+a_{n-1}e^{(n-1)AT}+\cdots\cdots+a_1e^{AT}+a_0I=0 \tag{9}$$

如以特征多项式的系数乘以式(7)中的相应项，可得：

$$\begin{aligned}&y_n+a_{n-1}y_{n-1}+\cdots\cdots+a_1y_1+a_0y_0\\&+(1+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1+a_0)CA^{-1}BU_0\\&=c(e^{nAT}+a_{n-1}e^{(n-1)AT}+\cdots\cdots+a_0I)e^{At_0}(A^{-1}BU_0+d)\\&=0\end{aligned} \tag{10}$$

因此，被称物体的重量为：

$$u_0=-\frac{y_n+a_{n-1}y_{n-1}+\cdots\cdots+a_1y_1+a_0y_0}{(1+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1+a_0)CA^{-1}B} \tag{11}$$

如已知特征多项式的系数、系数矩阵 A、B、C 及各采样时刻的读数值 y_i，就可算出 U_0 值。但计算式中要用到多项式的系数，计算并不方便，所使用的读数值 y_i 的个数也应尽可能地少。

根据式(7)，对于任意正整数 m，可有

$$y_m+CA^{-1}BU_0=ce^{mAT}e^{At_0}(A^{-1}BU_0+d) \tag{12}$$

类似地，顺次以系数 $a_{m-1},\cdots\cdots a_0$ 乘以上的相应各式，可得：

$$\begin{aligned}&y_m+a_{m-1}y_{m-1}+\cdots+a_0y_0\\&+(CA^{-1}BU_0+a_{m-1}CA^{-1}BU_0+\cdots\cdots+a_0CA^{-1}BU_0)\\&=C(e^{mAT}+a_{m-1}e^{(m-1)AT}+\cdots+a_0I)e^{At_0}(A^{-1}BU_0+d)\end{aligned} \tag{13}$$

如 $n=m$，且 $a_i=\alpha_i$，按照式(9)，则有

$$\begin{aligned} & y_m + a_{m-1}y_{m-1} + \cdots + a_0 y_0 \\ & +(CA^{-1}BU_0 + a_{m-1}CA^{-1}BU_0 + \cdots + a_0 CA^{-1}BU_0) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

及
$$C(e^{mAT} + a_{m-1}e^{(m-1)AT} + \cdots + a_0 I)e^{At_0}(A^{-1}BU_0 + d) = 0 \tag{15}$$

为了计算的方便，可以同时改变 m 值及 a_i 值，并用各采样时刻的测量值来计算 a_i 及使式(14)和式(15)成立的最小正整数 m。

已知输出稳定值为
$$y_\infty = -CA^{-1}BU_0 \tag{16}$$

任意采样时刻瞬态值和稳定值之差为：

$$Z_i = Y_i - Y_\infty \qquad i = 0,1,2,\cdots\cdots \tag{17}$$

按式(7)

$$Y_i = ce^{iAT}e^{At_0}(A^{-1}BU_0 + d) - cA^{-1}BU_0 \tag{18}$$

∴
$$Z_i = Y_i - Y_\infty = ce^{iAT}e^{At_0}(A^{-1}BU_0 + d) \tag{19}$$

由此可见，式(15)实际上是：

$$Z_m + a_{m-1}Z_{m-1} + \cdots + a_1 Z_1 + a_0 Z_0 = 0 \tag{20}$$

上式在任意初始时刻均能成立的条件下，对于以 1 个采样周期延迟的时刻为初始时刻，有

$$Z_{m+1} + a_{m-1}Z_m + \cdots a_1 Z_2 + a_0 Z_1 = 0 \tag{21}$$

依此，分别列出以延迟1个、2个、3个等采样周期的时刻为初始时刻的式子，并整理之，可得

$$\begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & \cdots\cdots & Z_{m-1} & Z_m \\ Z_1 & Z_2 & \cdots\cdots & Z_m & Z_{m+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ Z_{m-1} & Z_m & \cdots\cdots & Z_{2m-2} & Z_{2m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$

可以将 m 视为一个无限 Hankel 矩阵

$$H_\infty = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \cdots\cdots \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & \cdots\cdots \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{23}$$

的秩，即 $m = rank\ H_\infty$

在系统的阶数为 n 时，$Z_{i+n}(i \geqslant 0)$ 与它之前的 n 个数据 $Z_{i+n-1},\cdots\cdots Z_{i+1},Z_i$ 线性相关，因此可以认为 $(n+1)\times(n+1)$ 以上的矩阵的秩不会再增加，而 m 为一个 $n\times n$ 的 Hankel 矩阵

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & \cdots\cdots & Z_{n-1} \\ Z_1 & Z_2 & \cdots\cdots & Z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n-1} & Z_n & \cdots\cdots & Z_{2n-2} \end{bmatrix} \tag{24}$$

的秩，即 $m = rankH_{n-1}$

可以采用矩阵的奇异值分解(SVD)法来求取 m 值。根据以上所讨论的情形，可以采用一个十分大的整数(如 n 为系统阶数，可取 $p \geqslant n$)并构成 $(p+1)\times(p+1)$ 的 Hankel 矩阵 H_p

此时，$m = rank\ H_r$，对此实矩阵存在正交阵 U 及 V，使

$$H_r = U\Sigma V^T \tag{25}$$

此外，U、V 为正交阵，Σ 为以 H_r 的奇异值从大到小顺次排列的对角形矩阵

$$\Sigma = diga\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots\cdots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \cdots\cdots \sigma_r\} \tag{26}$$

$$\sigma_{i-1} \geqslant \sigma_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, p$$

矩阵 H_r 的秩即等于它的不为零的奇异值的个数。计算数据可能会因输入数据不精确或计算机的舍入误差而有微小的变化，从而引起矩阵秩的改变。实际上可计算矩阵 H_r 的有效秩。即根据精度或计算机舍入误差，给定一个误差限 τ，然后以矩阵 H_r 的奇异值大于 τ 的个数作为它的秩。

系数 a_i 的求取：

根据矩阵方程

$$\begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & \cdots\cdots & Z_{m-1} \\ Z_1 & Z_2 & \cdots\cdots & Z_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_p & Z_{p+1} & \cdots\cdots & Z_{p+m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_m \\ Z_{m+1} \\ \vdots \\ Z_{m+p} \end{bmatrix} \tag{27}$$

可以用最小二乘法或 SVD 法来求解。故被称物体的重量：

$$u_0 = -\frac{y_m + a_{m-1}y_{m-1} + \cdots\cdots + a_1y_1 + a_0y_0}{(1 + a_{m-1} + \cdots\cdots + a_1 + a_0)CA^{-1}B} \tag{28}$$

使用上式，不必求出系统的系数矩阵 A 的特征多项式的系数。同时，计算所需的最少瞬态值个数仅为 m。在实际读数达到稳定之前即可算出物体的重量，从而缩短了称重时间。这个测量－计算的方法具有普遍意义，不仅适用于电阻应变型也适用于其它类型的测重系统，只要该系统是线性的且能列出它的状态方程。

3　仿真

仿真时采用了一个弹性－阻尼型(Spring-Damper)测重装置的实验数据。这个系统的数学模型是一个自由度的二阶振动方程。它的自由振荡频率 $\omega_n = 103.8$ 弧度／秒。系统调整在临界衰减状态下。实验结果如表 1 所示。

表 1

时间(秒)	0.03	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.21	0.22	0.23
测量值	0.050	0.087	0.200	0.313	0.425	0.525	0.600	0.683	0.775	0.865	0.975	0.985	0.995

表中测量值的满刻度为 1 计。

按照以上实验数值，可求出 $Z_0 \sim Z_{13}$ 的值、此外，系统的二阶状态方程的系数矩阵分别为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10774.4 & -207.6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad 0]$$

经计算可得 $m = 4$

$$\alpha_0 = 0.4653,\quad \alpha_1 = -0.7664,\quad \alpha_2 = -1.1882,\quad \alpha_3 = 0.9210$$

实际使用了从0.03秒至0.10秒的采样值即可算出物体重量稳态值 $u_0 = 1.0013$，相对误差值为0.13%，如不考虑计算时间，测量时间从0.23秒缩短到0.1秒，大大提高了测量速度。

4 结束语

仿真结果证明，这个方法可以有效地用在各类线性测重系统中。此外，为确保计算式(28)成立，必须有式(20)、(21)，即式(15)成立。以仿真所求得的 m 值，$\alpha_0 \sim \alpha_3$ 及 $Z_0 \sim Z_4$ 值代入后，式(20)及式(21)均成立，从而验证了式(28)的正确性。

系数 α_i 值的计算误差将会造成测量时间的延长，故要求尽可能减少计算误差。

使用这个测量－计算的方法，可以将测量时间缩短约1/2～1/3。提高测量速度的效果十分显著。特别对于连续生产线上的自动称重装置，将会有很大的性能上的改进。当然，所使用的测量过程中的瞬态值必须先经预处理，如滤去干扰信号，剔除野值等。

参 考 文 献

1 奥村和久等.オ-トチェッカの应答特性につひての考察.フンリッテクニカル.(41号)

2 Rudolf Maier. Integrated Digital Control and Filtering for an Electrodynamically Compensated Weighing Cell. IEEE. Vol. 38, No. 5 Oct. 1989

3 北森俊行.计测の本质と计测工学.计测と制御,26—2,145～152(1987)

（编辑：刘家凯）

A CALCULATION METHOD FOR REDUCING WETGHING TIME

Song Shouxiang

(Dept. of Mechanical and Electrical Engineering)

ABSTRACT This paper discusses a calculation method which can be used to increase the measuring speed of weihging system for products. The usual measuring method can only get exact value after the value has been stable, whereas the method discussed in this paper uses a limited number of transient value obtained during measuring time to calculate the stable value. Simulation result shows that the measuring time can be reduce to about one third.

KEY WORDS weighing system, stable value