(14)

第15卷 第2期　　重庆建筑工程学字学报　　Vol. 15 No. 2
1993年 6月　　J. Chongqing Inst. of Archit. & Engin.　　June 1993

93－98

团筛图 S(2m＋1,t)的调和性*

彭大华

O157.5

（基础科学系）

摘　要　自从1980年 Graham 和 Sloane 提出调和图的概念以来，关于调和图的研究文章越来越多。本文构造了一个图类—团筛图 $S(n,t)$，证明了，当 $n=2m+1$ 时，对任 $m\geqslant 1$，$t\geqslant 1$，团筛图 $S(2m+1,t)$ 都是调和图。

关键词　调和图，调和性，团筛图

1　调和图的定义

设 G 是一个简单图，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是 G 的顶点集和边集。又设 h 是 $V(G)$ 到集 $Ne=\{0,1,2,\cdots,e=|E(G)|-1\}$ 的一个入射。uv 表示 G 中以顶点 u 和 v 为其两个端点的边。由 h 导出 G 中边的一个标号 h^*，使

$$h^*(uv)=h(u)+h(v)\qquad (mod\ e)$$

在 G 中，标号 h 说成是"调和的"，如果 h^* 是 $E(G)$ 到 $Ne-\{0\}$ 的一个 $1-1$ 映射。这时，G 亦称为是一个"调和图"。

2　团筛图 $S(n,t)$ 的定义

t 个 n 圈顺次从内到外套装起来，然后再在中心添加上一个顶点，最后从中心顶点开始逐次加上一些边将对应顶点顺次连接起来构成的图（如图 1 中所示）叫做一个"团筛图（*siere graph*）"，并记其为 $S(n,t)$。

3　团筛图 $S(2m+1,t)$ 的调和性

当 $n=2m+1,m\geqslant 1,t\geqslant 1$ 时，团筛图 $S(2m+1,t)$ 有下面的结果。

定理　团筛图 $S(2m+1,t)$ 是调和的。

证明　在 $S(2m+1,t)$ 的顶点集 $V(G)$ 上规定一个标号 h，使

$$h(v_0)=0$$

---

* 本文1992年9月5日收到.

$$h(v_{i,2j-1}) = i + 2t(j-1)$$
$$i = 1,2,\cdots,t;\ j = 1,2,\cdots,m+1$$
$$h(v_{i,2j}) = i + 2t(m+j)$$
$$i = 1,2,\cdots,t;\ j = 1,2,\cdots,m$$

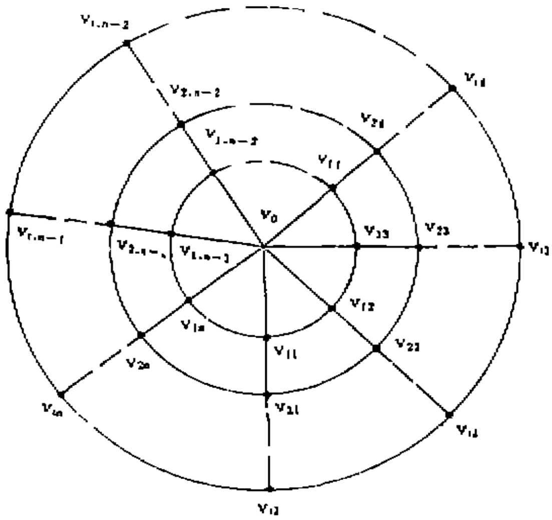

图 1

可以证明，h 是 G 上的一个调和标号。首先，显然 h 是 $V(G)$ 到 $\{0,1,2,\cdots|E|-1\}$ 的一个单射，G 中的边数为 $e = 2t(2m+1)$，对导出标号 h^* 有：

(1)
$$h^*(v_0v_{1,2j-1}) = h(v_0) + h(v_{1,2j-1}) = 2t(j-1)+1$$
$$j = 1,2,\cdots,m+1$$

即其所涉及的边的标号顺次取

1

$2t+1$

$2\cdot 2t+1$

$2\cdot 3t+1$

$2\cdot 4t+1$

$\cdots$

$2(m-1)t+1$

$2mt+1$

(2)
$$h^*(v_0v_{1,2j}) = h(v_0) + h(v_{1,2j}) = 2t(m+j)+1$$
$$j = 1,2,\cdots,m$$

即其所涉及的边的标号在次取

$2(m+1)t+1$

$2(m+2)t+1$

$2(2m-1)t+1$

$2\cdot 2mt+1$

(3)
$$h^*(v_{i,2j-1}v_{i+1,2j-1})=h(v_{i,2j-1})+h(v_{i+1,2j-1})$$
$$=[2(j-1)t+i]+[21j-1]t+(i+1)]$$
$$=2\cdot 2(j-1)t+2i+1$$
$$i=1,2,\cdots,t-1$$
$$j=1,2,\cdots,m+1$$

即其所涉及的边的标号当 $j=1$ 时顺次取

$$3,5,\cdots,2t-1$$

当 $j=2$ 时顺次取

$$2\cdot 2t+3,2\cdot 2t+5,\cdots,2\cdot 3t-1$$
$$\cdots\cdots$$

当 $j=m$ 是顺次取

$$2(2m-2)t+3,2(2m-2)t+5,\cdots,2(2m-1)t-1$$

当 $j=m+1$ 时顺次取

$$2\cdot 2mt+3,2\cdot 2mt+5,\cdots,2(2m+1)t-1$$

(4)
$$h^*(v_{i,2j}v_{i+1,2j})=h(v_{i,2j})+h(v_{i+1,2j})$$
$$=[2(m+j)t+i]+[2(m+j)t+(i+1)]$$
$$=2\cdot 2(m+j)t+2i+1$$
$$i=1,2,\cdots t-1$$
$$j=1,2,\cdots,m$$

而当取模 $e=2(2m+1)t$ 之后有

$$h^*(v_{i,2j}v_{i+1,2j})=2(2j-1)t+2i+1$$
$$i=1,2,\cdots,t-1$$
$$j=1,2,\cdots,m$$

即其所涉及的边的标号当 $j=1$ 时顺次取

$$2t+3,2t+5,\cdots,2\cdot 2t-1$$

当 $j=2$ 时顺次取

$$2\cdot 3t+3,2\cdot 3t+5,\cdots,2\cdot 4t-1$$

当 $j=m$ 时顺次取

$$2(2m-1)t+3,2(2m-1)t+5,\cdots,2\cdot 2mt-1$$

于是由(1)到(4)可知，不同圈上连边的标号在模 $e=2(2m+1)t$ 之下取尽了从 1 到 $2(2m+1)t-1$ 之间的一切奇数。

下面，对同圈上各连边的标号分两种情况来进行证明。

当 $m=2r$

(5)
$$
\begin{aligned}
h^*(v_{i,2j-1}v_{i,2j}) &= h(v_{i,2j-1}) + h(v_{i,2j}) \\
&= [2(j-1)t+i] + [2(m+j)t+i] \\
&= 2(m+2j-1)t+2i \\
& \qquad i = 1,2,\cdots,t \\
& \qquad j = \frac{1}{2}m+1, \frac{1}{2}m+2, \cdots, m
\end{aligned}
$$

而当取模 $e = 2(2m+1)t$ 之后有

$$
\begin{aligned}
h^*(v_{i,m+2s-1}v_{i,m+2s}) &= h(v_{i,m+2s-1}) + h(v_{i,m+2s}) \\
&= 2 \cdot 2(s-1)t + 2i \\
& i = 1,2,\cdots t \\
& s = 1,2,\cdots,\frac{1}{2}m
\end{aligned}
$$

取其所涉及的边的标号当 $s = 1$ 时顺次取

$$2,4,\cdots,2t$$

当 $s = 2$ 时顺次取

$$2 \cdot 2t+2, 2 \cdot 2t+4, \cdots, 2 \cdot 3t$$

当 $s = \frac{1}{2}m$ 时顺次取

$$2(m-2)t+2, 2(m-2)t+4, \cdots, 2(m-1)t$$

(6)
$$
\begin{aligned}
h^*(v_{i,2j}v_{i,2j+1}) &= h(v_{i,2j}) + h(v_{i,2j+1}) \\
&= [2(j+m)t+i] + [2jt+i] \\
&= 2(m+2j)t+2i \\
& \qquad i = 1,2,\cdots,t \\
& \qquad j = \frac{1}{2}m+1, \frac{1}{2}m+2, \cdots, m
\end{aligned}
$$

而当取模 $e = 2(2m+1)t$ 之后有

$$
\begin{aligned}
h^*(v_{i,m+2s}v_{i,m+2s+1}) &= h(v_{i,m+2s}) + h(v_{i,m+2s+1}) \\
&= 2(2s+1)t+2i \\
& \qquad i = 1,2,\cdots,t \\
& \qquad s = 1,2,\cdots,\frac{1}{2}m
\end{aligned}
$$

即其所涉及的边的标号当 $s = 1$ 时顺次取

$$2t+2, 2t+4, \cdots, 2 \cdot 2t$$

当 $s = 2$ 时顺次取

$$2 \cdot 3t+2, 2 \cdot 3t+4, \cdots, 2 \cdot 4t$$

当 $s = 12m$ 时顺次取

$$2(m-1)t+2, 2(m-1)t+4, \cdots, 2mt$$

(7)
$$h^*(v_{i,2m+1}v_{i,1}) = h(v_{i,2m+1}) + h(v_{i,1}) = [2m + i] + i = 2mt + 2i \qquad i = 1,2,\cdots,t$$

即其所涉及的边的标号顺次取

$$2mt + 2, 2mt + 4, \cdots, 2(m + 1)t$$

(8)
$$h^*(v_{i,2j-1}v_{i,2j}) = h(v_{i,2j-1}) + h(v_{i,2j}) = 2(m + 2j - 1)t + 2i \qquad i = 1,2,\cdots,t \quad j = 1,2,\cdots,\frac{1}{2}m$$

即其涉及的边的标号当 $j = 1$ 时顺次取

$$2(m + 1)t + 2, 2(m + 1)t + 4, \cdots, 2(m + 2)t$$

当 $j = 2$ 时顺次取

$$2(m + 3)t + 2, 2(m + 3)t + 4, \cdots, 2(m + 4)t$$

当 $j = \frac{1}{2}m$ 时顺次取

$$2(2m - 1)t + 2, 2(2m - 1)t + 4, \cdots, 2 \cdot 2mt$$

(9)
$$h^*(v_{i,2j}v_{i,2j+1}) = h(v_{i,2j}) + h(v_{i,2j+1}) = 2(m + 2j)t + 2i \qquad i = 1,2,\cdots,t \quad j = 1,2,\cdots,\frac{1}{2}m$$

即其所涉及的边当 $j = 1$ 时顺次取

$$2(m + 2)t + 2, 2(m + 2)t + 4, \cdots, 2(m + 3)t$$

当 $j = 2$ 时顺次取

$$2(m + 4)t + 2, 2(m + 4)t + 4, \cdots, 2(m + 5)t$$

当 $j = \frac{1}{2}m$ 时顺次取

$$2 \cdot 2mt + 2, 2 \cdot 2mt + 4, \cdots, 2(2m + 1)t$$

从(5) 到(9) 可知，所涉及的边的标号占据了从 2 到 $e = 2(2m + 1)t$ 之间的一切偶数。于是知，当 $m = 2r$ 时，$S(2m + 1,t)$ 中的边的标号占据了从 1 到 $e = 2(2m + 1)t$ 之间的一切整数，因而知此时，$S(2m + 1,t)$ 是调和的。

但当 $m = 2r + 1$ 时

此时，类似(一) 推导，知 $S(2m + 1,t)$ 是调和的。

定理证毕。

例：　下面图 2 中所示是 $m = 2, t = 3$ 时 $S(2m + 1,t) = S(5,3)$ 的调和标号及当 $m = 3, t = 2$ 时 $S(2m + 1,t) = s(7,2)$ 的调和标号的示意图。

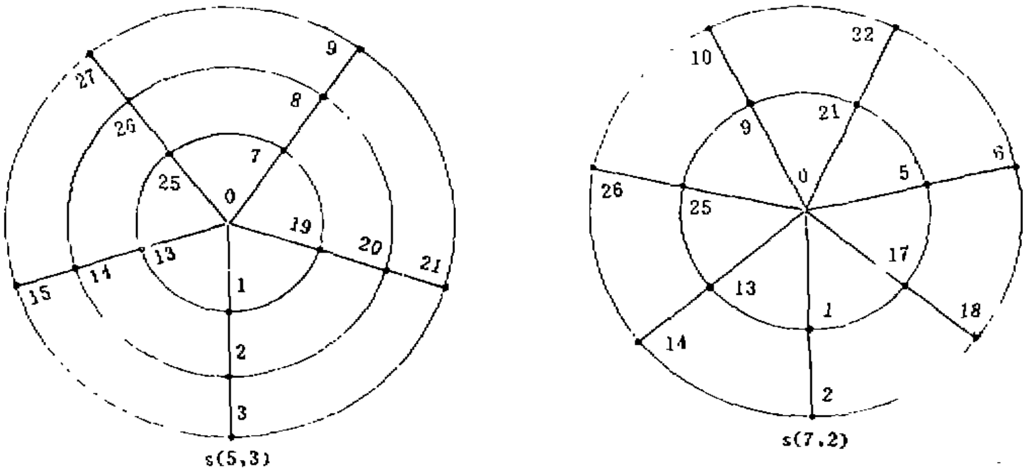

图 2

4 猜 想

猜想：当 $m \geqslant 2, t \geqslant 1$ 时，团筛图 $S(2m,t)$ 是调和的。

参 考 文 献

1 R. L. Graham and N. J. A. Sloan. On additive bases and harmonious graphs. SIAM J. Alg. Discrete Math. 1(1980) 382～404

（编辑：姚国安）

THE SIEVE GRAPH S(2m+1,t) IS HARMONIOUS

Peng Taihua
(Dept. of Natural Science)

ABSTRACT Since Graham R. L. and Sloan N. J. A. advanced the concept of the harmonious graph *in 1980. Many such researching papers are published.* This paper constructs a class of the graph-sieve graph S(n,t), and proves that the sieve graph S(2m+1,t) is harmonious when n=2m+1.

KEY WORDS harmonious graph, sieve grap