(5)

第 15 卷第 4 期　　重庆建筑工程学院学报　　Vol. 15 No. 4
1993 年　12 月　　J. Chongqing Inst. of Archit. & Engin.　　Dec.　1993

28-33

广义传递矩阵和边界元组合法*

张 诗 德
（建筑工程系）

TU311.1

A

摘　要　本文将传递矩阵与边界法相结果，提出适合求解二维复杂形状且分区同性结构静力问题的广义传递矩阵和边界元组合法，并用理论和算例说明本文法既可减少所需内存提高计算精度又不致扩大矩阵阶数，从而加快运算速度。

关键词　数值方法，边界元，传递矩阵　广义传递矩阵、组 边界元组合法

中图法分类号　TU311.1

在边界元法发展中，人们提出了求分区同性结构静力问题的边界元子区域技术（BEMS）[1]。但随着区域分多，离散后的边界积分方程阶数扩大，从而需要较多内存，耗费更多机时，对微机应用不利。为克服子区域技术这种缺点，文献[2]提出传递矩阵和边界元组合法（BETM）。其方法简述如下：

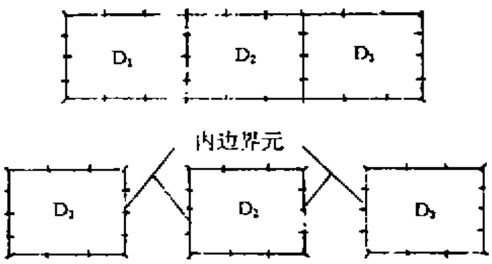

图 1

设分区均匀同性的板可分为 $D_k(k=1,2,\cdots,s)$ 个具有不同弹性常数的子域如图 1 所示。对每个子域可列出相应的离散后边界积分方程：

$$[H]_k\{u\}_k=[G]_k\{q\}_k \qquad (k=1,2,\cdots,s) \tag{1}$$

其中，$\{u\}_k$ 及 $\{q\}_k$ 分别为区域 D_k 之边界位移和面力矢量，$[H]_k$ 及 $[G]_k$ 分别为由弹性常数计算的系数矩阵。将(1) 式两边前乘 $[G]_k^{-1}$ 得：

$$[G]_k^{-1}[H]_k\{u\}_k=\{q\}_k \quad \text{或} \quad [K]_k\{u\}_k=\{q\}_k \tag{2}$$

将(2) 式写成分块矩阵为：

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LB} & K_{LR} \\ K_{BL} & K_{BB} & K_{BR} \\ K_{RL} & K_{RB} & K_{RR} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} u^L \\ u^B \\ u^R \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} q^L \\ q^B \\ q^R \end{Bmatrix} \tag{3}$$

其中，$\{u^L\}_k$，$\{u^R\}_k$ 及 $\{q^L\}_k$，$\{q^R\}_k$ 分别为左右内边界的位移和面力矢量；$\{u^B\}_k$，$\{q^B\}_k$ 分别为外边界位移和面力矢量。从(3) 式中消去 $\{u^B\}_k$ 后有：

$$\begin{Bmatrix} q^L \\ q^R \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} K_{LL}-K_{LB}K_{BB}^{-1}K_{BL} & K_{LR}-K_{LB}K_{BB}^{-1}K_{BR} \\ K_{RL}-K_{RB}K_{BB}^{-1}K_{BR} & K_{RR}-K_{RB}K_{BB}^{-1}K_{BR} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} u^L \\ u^R \end{Bmatrix}_k + \begin{Bmatrix} K_{LB}E_{BB}^{-1}q^B \\ K_{RB}E_{BB}^{-1}q^B \end{Bmatrix}_k \tag{4a}$$

* 收稿日期：1992-11-23

张诗德，男，1956 年生，讲师，重庆建筑工程学院建二系（630045）

或
$$\begin{Bmatrix} q^L \\ q^R \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} u^L \\ u^R \end{Bmatrix}_k + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_k \tag{4b}$$

重新整理后为：
$$\begin{Bmatrix} u^R \\ -q^R \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} u^L \\ q^L \end{Bmatrix}_k + \begin{Bmatrix} T_{F1} \\ T_{F2} \end{Bmatrix}_k \tag{5}$$

其中
$$T_{11} = -K_{12}^{-1}K_{11} \qquad T_{12} = K_{12}^{-1}$$
$$T_{21} = K_{22}K_{12}^{-1}K_{11} - K_{21} \qquad T_{22} = -K_{22}K_{12}^{-1}$$
$$T_{F1} = -K_{12}^{-1}q_1 \qquad T_{F2} = -K_{22}K_{12}^{-1}q_1 - q_2$$

又 D_k 右边界与 D_{k+1} 区左边界之位移和面力矢量应满足：
$$\{u^R\}_k = \{u^L\}_{k+1} \qquad \{-q^R\}_k = \{q^L\}_{k+1} \tag{6}$$

将(6) 式代入(5) 式并增加一增广方程整理后有：
$$\begin{Bmatrix} u^L \\ q^L \\ 1 \end{Bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{F1} \\ T_{21} & T_{22} & T_{F2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} u^L \\ q^L \\ 1 \end{Bmatrix}_k \tag{7}$$

或
$$\{Z^L\}_{k+1} = [T]_k \{Z^L\}_k \tag{8}$$

其中，$\{Z^L\}_k = \{u^L, q^L, 1\}_k^T$ 和 $[T]_k = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{F1} \\ T_{21} & T_{22} & T_{F2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k$ 分别为状态矢量和区域传递矩阵。

将(8) 式下标变为 $k-1$ 就有：
$$\{Z^L\}_k = [T]_{k-1}\{Z^L\}_{k-1} \tag{9}$$

推面广之得：
$$\{Z^L\}_s = [T]_{s-1}[T]_{s-2}\cdots[T]_2[T]_1\{Z^L\}_1 \tag{10}$$

对 D_s 区右边界同样有：
$$\{Z^R\}_s = \{u^R, -q^R, 1\}^T = [T]_s[T]_{s-1}\cdots[T]_2[T]_1\{Z^L\}_1 = [U]_s\{Z^L\}_1 \tag{11}$$

其中，$[U]_s$ 为结构的整体传递矩阵。将(11) 式中的下标变为 k 如果已知 D_1 区之边界状态矢量即可由该式求出任一区域 D_k 边界状态矢量，进而求出区域内任意点之位移和应力。

由(11) 式可知，结构整体之传递矩阵 $[U]$ 之阶数等于状态矢量阶数，这远比文献[1]BEMS 中的系数矩阵阶数少。这亦正是传递矩阵 —— 边界元组合法节省内存提高运算速度之实质。

另由(5) 式可见，欲使 K_{12}^{-1} 存在其必为满铁方阵，这就要求 D_k 区左右边界长度或单元数相等因而限制了 BETM 方法对图 2 所示形状结构的应用。所以，文献[2]之 BETM 方法是有局限的。为此，本文提出一种适合求二维复杂形状分区同性结构的广义传递矩阵 —— 边界元组合法(BEETM)。

1　广义传递矩阵

1.1　区域广义传递矩阵

设如图 2a 所示结构之 D_k 区左边界有 l 个单元，右边界有 m 个单元；D_{k+1} 区右边界有 n 个单元且 $l \geqslant m \geqslant n$. 将 $\{q^L\}_k$ 的 l 个元素依次编号则有：
$$\{q^L\}_k = \{q_1^L, q_2^L, \cdots, q_{l-m}^L, q_{l-m+1}^L, \cdots, q_{l-1}^L, q_l^L\}_k^T$$

令： $\{q_c^L\}_i = \{q_1^L, q_2^L, \cdots, q_{l-m}^L\}_i^T, \{q_f^L\} = \{q_{l-m+1}^L, \cdots, q_{l-1}^L, q_l^L\}_i^T$

于是
$$\{q^L\}_i = \begin{Bmatrix} q_c^L \\ q_f^L \end{Bmatrix}_i \tag{12}$$

其中，$\{q_c^L\}_i$ 和 $\{q_f^L\}_i$ 分别称为 D_i 区左边界面力的约束矢量和自由矢量，其阶数分别为 $l-m$ 和 m 阶。同样：

$$\{q^R\}_i = \{q_1^R, q_2^R, \cdots, q_{m-n}^R, \cdots, q_{m-1}^R, q_m^R\}_i^T = \{q_c^R, q_f^R\}_i^T \tag{13}$$

其中 $\{q_c^R\} = \{q_1^R, q_2^R, \cdots, q_{m-n}^R\}_i^T$ 和 $\{q_f^R\} = \{q_{m-n+1}^R, q_{m-n+2}^R, \cdots, q_c^R, q_f^R\}_i^T$

分别称为 D_i 区右边界面力的约束矢量和自由矢量，阶数分别为 $m-n$ 及 n 阶。将(12) 和 (13) 式代入(4) 式重新分块后得：

$$\begin{Bmatrix} q_c^L \\ q_f^L \\ q_c^R \\ q_f^R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(l-m)\times l}{A} & \underset{(l-m)\times m}{B} & \underset{(l-m)\times 1}{C} \\ \underset{m\times l}{C} & \underset{m\times m}{D} & \underset{m\times 1}{q_{1f}} \\ \underset{(m-n)\times l}{E} & \underset{(m-n)\times m}{F} & \underset{(m-n)\times 1}{q_{2c}} \\ \underset{n\times l}{I} & \underset{n\times m}{J} & \underset{n\times 1}{q_{2f}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} u^L \\ u^R \\ 1 \end{Bmatrix}_i \tag{14}$$

上式中只有 D 是方阵阶数为 $m\times m$. 再将其作一系列代数运算，并注意到 D_i 区右边界同时又是 D_{i+1} 区左边界应满足：
$$\{u^R\}_i = \{u^L\}_{i+1} \tag{15}$$

及
$$\begin{Bmatrix} -q_c^R \\ q_f^R \end{Bmatrix}_i = \{-q^R\}_i = \{q^L\}_{i+1} = \begin{Bmatrix} q_c^L \\ q_f^L \end{Bmatrix}_{i+1} \tag{16}$$

于是(14) 式变成：

$$\begin{Bmatrix} \{q_c^L\}_i \\ \{q_c^L\}_{i+1} \\ \{q_f^L\}_{i+1} \\ \{u^L\}_{i+1} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} BD^{-1} & A-BD^{-1}C & q_{1c}-BD^{-1}q_{1f} \\ -FD^{-1} & FD^{-1}C-E & FD^{-1}q_{1f}-q_{2c} \\ -JD^{-1} & JD^{-1}C-I & ID^{-1}q_{1f}-q_{2c} \\ D^{-1} & -D^{-1}C & D^{-1}q_{1f} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_i \tag{17}$$

将(17) 式分写成以下二式：

$$\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} -JD^{-1} & JD^{-1}C-I & ID^{-1}q_{1f}-q_{2c} \\ D^{-1} & -D^{-1}C & D^{-1}q_{1f} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_i = [U]_i \begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_i \tag{18}$$

及

$$\begin{Bmatrix} \{q_c^L\}_i \\ \{q_c^L\}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} BD^{-1} & A-BD^{-1}C & q_{1c}-BD^{-1}q_{1f} \\ -FD^{-1} & FD^{-1}C-E & FD^{-1}q_{1f}-q_{2c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_i = [V]_i \begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_i \tag{19}$$

$[U]_i$ 叫作 D_i 区之广义传递矩阵是长方阵，$[V]_i$ 称为 D_i 区的约束矩阵，若 D_i 区左右边界元

数相等，则$[U]_k$ 为方阵，$[V]_k$ 不存在。

1.2　结构的传递矩阵

将(18)式之下标换作 $k-1$ 则有：

$$\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_k = [U]_{k-1}\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_{k-1} \tag{20}$$

由(18)，(19)及(20)式得：

$$\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_{k+1} = [U]_k[U]_{k+1}\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_{k-1}$$

$$\begin{Bmatrix} \{q_c^L\}_k \\ \{q_c^L\}_{k+1} \end{Bmatrix} = [V]_k[U]_{k-1}\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_{k-1}$$

推而广之有：

$$\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_{k+1} = [U]_k[U]_{k-1}\cdots\cdots[U]_2[U]_1\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = [T]_k\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}_1 \tag{21}$$

$$\begin{Bmatrix} \{q_c^L\}_k \\ \{q_c^L\}_{k+1} \end{Bmatrix} = [V]_k[U]_{k-1}\cdots\cdots[U]_2[U]_1\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix} = [R]_k\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

如果结构有 S 个区域用 S 代替(21)式中的 k 考虑到(15)及(16)式则有：

$$\{-q_f^R, u^L, 1\} = [T]_s\{q_f^L, u^L, 1\} \tag{23}$$

其中，$[T]_s = [U]_s[U]_{s-1}\cdots\cdots[U]_2[U]_1$ 称为结构传递矩阵．(23)式称为结构传递方程。

再将(22)式用于各区域并考虑到(16)式可得 S 个式子：

$$\begin{Bmatrix} \{q_c^L\}_1 \\ \{q_c^L\}_2 \end{Bmatrix} = [R]_1\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} \{q_c^L\}_2 \\ \{q_c^L\}_3 \end{Bmatrix} = [R]_2\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}\cdots$$

$$\begin{Bmatrix} \{q_c^L\}_{S-1} \\ \{q_c^L\}_S \end{Bmatrix} = [R]_{S-1}\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} \{q_c^L\} \\ -\{q_c^R\} \end{Bmatrix}_S = [R]_S\begin{Bmatrix} q_f^L \\ u^L \\ 1 \end{Bmatrix}\cdots \tag{24}$$

上式称为结构的约束方程。由(23)及(24)式如果已知$\{Z^L\}_1 = \{q_f^L, u^L, 1\}^T$即可求各区域左右边界状态矢量，进而求区域内任一点之位移和应力。

2　非链式结构的传递矩阵

上节所述方法除可求解链式结构外，亦可求图 2b 所示非链式结构的静力问题。事实上，只要将图 2b 所示结构分成内外边界相连的不同区域，利用(2)式有：

$$\begin{bmatrix} K_{gg} & K_{gt} \\ K_{tg} & K_{tt} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} u^g \\ u^t \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} q^g \\ q^t \end{Bmatrix}_k \tag{25}$$

考虑到内外边界元数不等，把 D_k 区外边界单元数多于内边界单元数的那一部分面力矢量定义为自由矢量，剩下的定义为约束矢量即令：

$$\{q^g\} = \{q_f^g, q_c^g\}_k^T \quad 及 \quad \{q^t\} = \{q_f^t, q_c^g\}^T \tag{26}$$

将(25) 式重新分块得：

$$\begin{Bmatrix} q_c^g \\ q_f^g \\ q_c^t \\ q_f^t \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ E & F \\ I & J \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} u^g \\ u^t \end{Bmatrix}_k \tag{27}$$

又由 D_k 区内边界与 D_{k+1} 区外边界之协调条件，与上节一样可得到相应的广义传递矩阵及约束矩阵，即在(18) 式的 $[U]_k$ 和(19) 式的 $[V]_k$ 中划掉相应的行和列有：

$$\begin{Bmatrix} q_f^g \\ u^g \end{Bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} -JD^{-1} & JD^{-1}C - I \\ D^{-1} & D^{-1}C \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} q_f^g \\ u^g \end{Bmatrix}_k = [U]_k \begin{Bmatrix} q_f^g \\ u^g \end{Bmatrix}_k \tag{28}$$

$$\begin{Bmatrix} \{q_c^g\}_k \\ \{q_c^g\}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} BD^{-1} & A - BD^{-1}E \\ -FD^{-1} & FD^{-1}C - E \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} q_f^g \\ u^g \end{Bmatrix}_k = [V]_k \begin{Bmatrix} q_f^g \\ u^g \end{Bmatrix} \tag{29}$$

推而广之即可得结构之广义传递矩阵、传递方程及约束方程。方法与上节相同故不赘述。

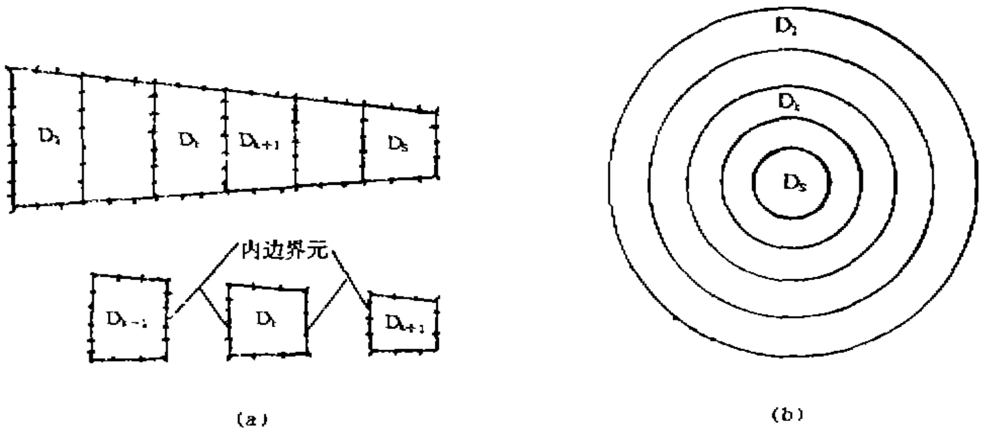

图 2

3 算　　例

例 1　计算图 3 所示受均布载荷作用的悬臂梁的自由端中点 C 的位移。其结构见表 1 和表 2.

由表 1 可见随分区数增多计算精度有所提高且本文提出的 BEETM 法和其它方法结果相符。但由表 2 可见随分区数增多，BEETM 法的机时较其它方法明显减少。故在为提高计算精度而增加分区数即单元数时，用 BEETM 法较其它边界元方法好。

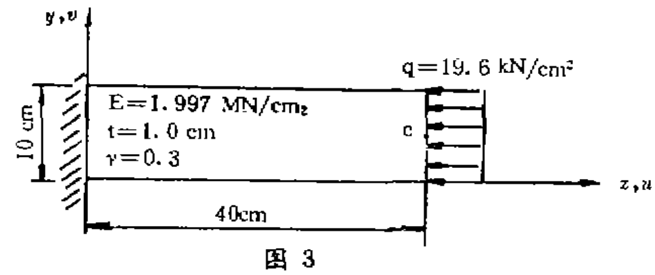

图 3

表 1　位移比较

	1	2	3	4
BEM	0.2106	0.2953	0.3418	0.3469
BEMS	0.2106	0.2645	0.3297	0.3334
BEETM	0.2106	0.2645	0.3297	0.336

表 2　机时比较

方　法	分区数的机时			
	1	2	3	4
BEM	0.18	0.24	0.42	0.67
BEMS	0.18	0.25	0.41	0.58
BEETM	0.25	0.26	0.31	0.34

参 考 文 献

1 J. C. Lachat and J. O. Watson Progressin the use of boundary integral equations, illustrated by examples. Comput. Meth. Appl. Mech. Engin., 10, 273～289(1977)

2 M. Ohga, T. Shigematsu and T. Hara, Structural analysis by a combined boundary element-transfer mafrix method, Comput. Struct. Vol. 24, No. 3, pp185～189, 1986

3 S. Sankar and S. V. hoa. An extended transfer matrix-finitelement method. Journal of Sound and Vibration (1980), 70(2). 205～211

4 徐铭陶，刘鹏. 广义传递矩阵和有限元组合法. 振动与冲击，1983. 2

5 刘鹏. 改进的广义传递矩阵和有限元组合法. 重庆大学学报，1984. 1

（编辑：徐维森）

AN EXTENDED TRANSFER MATRIX AND BOUNDARY ELEMENT METHOD

Zhang Shide

(Dept. of Civil Engineering)

ABSTRACT　A combination of extended transfer matrix and boundary element method is proposed for solving two dimentional statics problems of complicated nonhomogeneous structure. It is explained with the theory and the example. The method can get greater numerical accuray and shorten computation time in small amount of computer storage without getting involved with large matrices.

KEY WORDS　numerical method, boundary element, transfer matrix