

# 变分法用于滑坡反分析的几个问题

朱 凡

(建筑工程学院)

**摘 要** 本文探讨了变分法在确定边坡极限高度时存在的某些问题。绘制了坡角, 裂缝位置, 极限高度与  $\varphi$  值的关系曲线。根据所得结论可直接确定极限高度, 并用于滑坡的反分析, 还易于反算  $C, \varphi$  值。用所得结果与文献中的实例作了对比, 并对甘肃洒勒山滑坡进行了反分析。

**关键词** 变分法, 滑坡反分析, 滑坡

**中图法分类号** TU413.62

滑坡分析一直是岩土工程界研究的一个重要课题。除了采用通常的边坡稳定分析条分法的极限平衡法和极限分析法以外, 采用离心机进行模型试验正在日益引起人们的注意。由于条分法和极限分析法计算工作量大, 离心机模型试验设备昂贵, 采取有代表性的试样测定岩土有关的强度参数和确定滑动面的位置比较困难, 以及岩土的破坏机制比较复杂等原因, 因而, 目前工程实践中仍然广泛采用莫尔库伦破坏准则, 把岩土体视作刚塑性体和均质材料, 绘制各种计算图表, 以确定边坡的极限高度。对滑坡进行反分析早已引起了岩土工程界的重视<sup>[1,2]</sup>。但是用现有的方法进行反分析, 不但工作量大, 而且对于均质岩土, 一般只能粗略地估计  $C, \varphi$  值。虽然反复迭代, 也难以求得比较合理的参数。现有的图表, 只能从  $C, \varphi$  值计算极限高度<sup>[1]</sup>, 不能根据滑坡高度反算  $C, \varphi$  值。本文探讨了滑动面上应力分布状态, 使其既满足平衡条件又满足横截条件, 绘制出坡角、坡顶裂缝位置、临界坡高和  $C, \varphi$  值的关系曲线, 可方便地反算出  $C, \varphi$  值。

## 1 基本原理

由极限分析的上限定理可知, 对于任意假定的滑动体, 当自重位移所做的功超过该滑体能量消散时, 边坡将产生破坏。应用刚塑性体变形假定和虚功原理, 可得到边坡临界高度的上限值。本文以均质岩土边坡和线性莫尔库伦准则得到的解析解为基础, 以边坡极限高度  $H_m$  为目标函数, 并使其满足平衡方程和破坏准则的约束条件, 采用拉格朗日乘子  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  可得出下列泛函:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} y' dx + (\lambda_1 H + \lambda_2 V + \lambda_3 M) dx \quad (1)$$

\* 收稿日期: 1993-07-05.

朱凡, 女, 1947年生, 讲师, 重庆建筑大学建筑工程学院(630045).

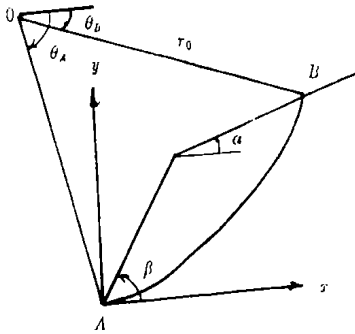


图 1 边坡稳定分析图

$$F = y' + \lambda_1 H + \lambda_2 V + \lambda_3 M \tag{2}$$

式中  $H, V, M$  分别表示水平方向和竖直方向力的平衡方程及力矩平衡方程。

考虑单位的刚体运动, 在重力  $V_0$  作用下, 旋转体所做的总功率

$$W = \lambda_1 H + \lambda_2 V + \lambda_3 M \tag{3}$$

式中:  $H, V$ —— 分别表示作用在刚体上的水平合力和竖直合力

$M$ —— 关于旋转点  $O'$  的合力矩

$\lambda_1, \lambda_2$ —— 分别表示水平和竖直方向的实际位移速率

$\lambda_3$ —— 刚体实际的转动速率

由图 1 知, 平衡方程为:

$$H = \int_{x_0}^{x_n} -(\sigma y' - \tau) dx \tag{4}$$

$$V = \int_{x_0}^{x_n} (\tau y' + \sigma) dx - V_0 \tag{5}$$

$$M = \int_{x_0}^{x_n} (\tau y - \tau x y' - \sigma y y' - \sigma x) dx + M_0 \tag{6}$$

式中  $V_0 = \int_{x_0}^{x_n} \gamma y' (x - y \text{ctg} \beta) dx \tag{7}$

$$M_0 = \frac{\gamma y'}{2} (x^2 - y^2 \text{ctg}^2 \beta) dx \tag{8}$$

$\gamma$ —— 土的重度,  $\tau = \sigma \text{tg} \varphi + C = \sigma f + c$

$x_0, x_n$  为可动边界

应用欧拉方程

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= (\lambda_1 + \lambda_3 y) y' - (\lambda_2 - \lambda_3 x) \\ &- (\lambda_1 + \lambda_3 y) f - (\lambda_2 - \lambda_3 x) f y' = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

式中  $f = \text{tg} \varphi$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} &= (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{d\tau}{dx} - (\lambda_1 + \lambda_3) \frac{d\sigma}{dx} \\ &- 2\lambda_3 \tau - (\lambda_2 - \lambda_3 x) \gamma = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

(11) 式除以  $\lambda_3$ , 得

$$-\left( \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + y \right) y' + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - x \right) + \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + y \right) f + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_3} - x \right) f y' = 0 \tag{13}$$

令  $\lambda_1/\lambda_3 = -r \sin \theta$ ,  $\lambda_2/\lambda_3 = -r \cos \theta$

则式(13)变为

$$r \sin \theta \frac{dy}{dx} - r \cos \theta - r \sin \theta f - r \cos \theta f y' = 0 \quad (14)$$

由于  $dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$  (15)

$$dy = -\sin \theta dr - r \cos \theta d\theta \quad (16)$$

将(15), (16)代入(14), 得  $\frac{dr}{d\theta} = \tau f$  (17)

同理, 由(12)式得  $\frac{d\sigma}{d\theta} = -2\tau + \gamma \cdot r \cos \theta$

即  $\frac{d\sigma}{d\theta} + 2\tau - \gamma \cdot r \cos \theta = 0$  (18)

对于莫尔库伦材料, 滑动面上应力应满足  $\tau = f\sigma + c$  (19)

由(17)式可得  $r = r_0 e^{f(\theta - \theta_0)}$  (20)

即对数螺旋线方程。代入(18)式, 可求解得

$$\sigma = D e^{-2f(\theta - \theta_0)} - \frac{c}{f} + \frac{\gamma r_0}{1 + 9f^2} e^{f(\theta - \theta_0)} (\sin \theta + 3f \cos \theta) \quad (21)$$

式(21)中  $D$  为积分常数。 $\sigma$  即滑动面上的正应力方程。

## 2 基本方程

将滑动面上正应力方程式(21)代入(4), (5), (6)式, 并改写为便于编写计算机计算程序的形式, 分别得(22), (23)和(24)式如下:

$$\begin{aligned} & D[m^{-1} \sin(\theta_A - \varphi) - \sin(\theta_0 - \varphi)] + E[m \sin(\theta_A - \varphi) - \sin(\theta_B + \varphi)] \\ & + R\{m^2[2A \sin(\theta_A + \varphi) + 2\cos \varphi] - [2B \sin(\theta_B + \varphi) + 2\cos \varphi]\} \\ & + c \cdot \cos \varphi \cdot (m \cos \theta_A - \cos \theta_B) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & - D[m^{-1} \cos(\theta_A - \varphi) - \cos(\theta_0 - \varphi)] + E[m \cos(\theta_A - \varphi) + \cos(\theta_B + \varphi)] \\ & + R\{-m^2[2A \cos(\theta_A + \varphi) - 2\sin \varphi - \csc \varphi] + [2B \cos(\theta_B + \varphi) - 2\sin \varphi - \csc \varphi]\} \\ & + c \cdot \cos \varphi \cdot (m \sin \theta_A - \sin \theta_B) = 4R(1 + 9f^2)AW \cos \varphi \end{aligned} \quad (23)$$

$$MW = MR - MB - MA = \frac{2cAR}{\gamma \cdot r_0} \quad (24)$$

(22), (23), (24)式中  $E, R, m, A, B, AW, MR, MB, MA$  分别为:

$$E = -\frac{c}{f}, \quad R = \frac{\gamma r_0}{4(1 + 9f^2)}, \quad m = e^{f(\theta_A - \theta_0)}$$

$$A = 3f \cos \theta_A + \sin \theta_A,$$

$$B = 3f \cos \theta_B + \sin \theta_B,$$

$$AW = AR - AB - AAA,$$

$$(AR = m^2 - 1)/4f, AB = (\cos \theta_B - CC) \cdot \sin \theta_B / 2,$$

$$AAA = m(CC \cdot \sin \theta_A - \sin \theta_B \cdot \cos \theta_B) / 2,$$

$$CC = m \cos \theta_A + (m \sin \theta_A - \sin \theta_B) / \operatorname{tg} \beta,$$

$$MR = (m^3 A - B) / 3(1 + 9f^2),$$

$$MB = AB(\cos \theta_B + CC) / 3,$$

$$MA = AAA \cdot (CC + m \cos \theta_A) / 3.$$

破坏面两个端点是可动的, 为得到最小解答, 则应满足其横载条件

$$[F - (y' - y'_1)Fy']_{x=x_i} = 0 \tag{25}$$

式中  $x_i$  表示两动点  $A, B$  的坐标, 即  $x_i = x_A, x_B$ , 则  $A$  点横截条件为:

$$\sigma_A = \frac{-c}{f + \text{ctg}(\theta_A + \beta)} \tag{26}$$

$B$  点横截条件为:

$$\sigma_B = \frac{-c}{f + \text{ctg}(\theta_B + \alpha)} \tag{27}$$

啊由式(22), (23) 和 (24) 联立求解, 可得  $D, \theta_A, \theta_B$ . 根据计算结果即可绘出边坡极限高度系数  $\eta$  与  $\beta$  和  $\varphi$  的关系曲线(图 2), 进而求得  $H_m$ .

应该指出, 式(21) 与文献[1] 中绘出的解对比, 没有含  $\lambda_3$  常数项. 这是由于文献[1] 以滑动体重量  $W$  为目标函数, 在确定积分常数和拉氏乘子时, 又没有考虑横截条件. 我们以  $\beta = 70^\circ, c = 10 \text{ kPa}, \varphi = 20^\circ$  为例, 求得相应于滑体最大重量为  $W = 122 \text{ kN/m}$  时,  $H_m = 5.6 \text{ m}$ ; 相应于滑体最小重量  $W = 114 \text{ kN/m}$  时,  $H_m = 6.13 \text{ m}$ . 结果得出滑动体重量大时, 其边坡极限高度反而小的结论, 这说明以滑动体重量  $W$  为目标函数可能是不合理的. 由于滑动面为对数螺旋线, 因而文献[1] 由力矩平衡方程所推求的关系与我们的计算是完全相同的, 文献[1] 根据  $\theta_A$  和  $\theta_B$  所求得的极限高度与我们计算的结果也是吻合的, 但文献[1] 给出的应力分布与我们计算的结果理应有所不同.

此外, 文献[2] 中的应力式虽然与我们求得的完全相同, 但文献[2] 中的泛函数无目标函数, 且在计算中要求坡址的  $\tau = 0$ , 换言之, 即坡址的应力为双向相等的拉应力, 其值为  $\sigma_i = c/\text{tg}\varphi$ , 显然也是不合理的.

### 3 计算方法

由式(22), (23), (24) 三式联立求解, 并使其满足横截条件, 计算出相应于不同坡角  $\beta$ , 不同  $\varphi$  值与边坡极限高度系数的关系曲线.

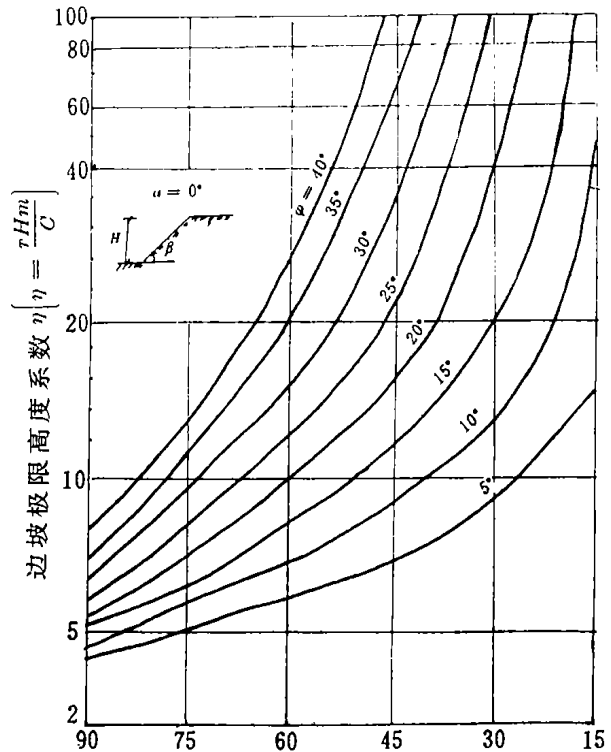


图 2 边坡坡角, 内摩擦角和极限高度系数的关系曲线

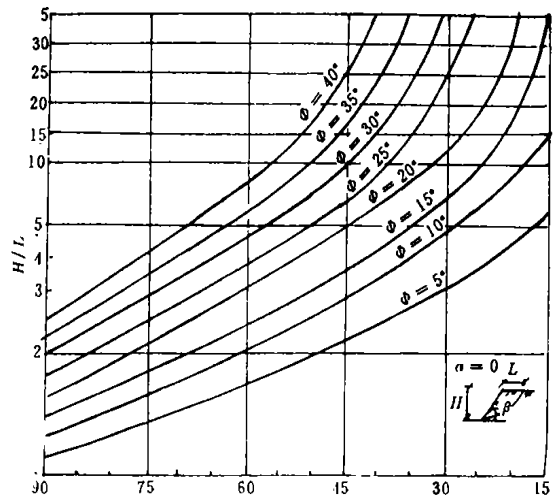


图 3 边坡坡角, 内摩擦角和  $H/L$  的关系曲线

### 3.1 确定极限高度 $H_m$

计算  $H_m$  步骤如下:

- (1) 输入边坡形状已知参数, 岩土强度参数;
- (2) 假定  $\theta_A, \theta_B$ , 由式(21) 算出滑动面端点的应力  $\sigma$ ;
- (3) 由式(26), (27) 反算出  $\theta'_A, \theta'_B$ ;
- (4)  $\theta_{A+1} = \theta_{Ai} + \Delta\theta$ ,  $\theta_{B+1} = \theta_{Bi} + \Delta\theta$
- (5) 重复(2)至(4)步, 直至满足  $|\theta_A - \theta'_A| \leq \varepsilon$  和  $|\theta_B - \theta'_B| \leq \varepsilon$ ;
- (6) 输出  $H_m$ .

在计算过程中若令  $c = 1 \text{ KPa}$ ,  $\gamma = 1 \text{ kN/m}^3$ , 则可算出相应于同一  $\varphi$  值不同  $\beta$  值时的边坡极限高度系数  $\eta$ , 由此即可绘制出  $\varphi, \beta$  与  $\eta$  的关系曲线, 从而求出  $H_m = \frac{\eta \cdot c}{\gamma}$ . 见图 2.

### 3.2 由滑坡反算 $c, \varphi$ 值

输入参数  $H, L$  ( $H$  为滑坡坡高,  $L$  为坡顶裂缝处距坡肩水平距离), 计算  $H/L$  相应于同一  $\varphi$  值不同  $\beta$  值的数值, 绘制三者之间关系曲线(见图 3), 根据  $H/L$  及  $\beta$ , 查图 3 即可求得相应  $\varphi$  值. 再由  $\varphi$  与  $\beta$  值从图 2 曲线查得  $\eta$ , 再由关系式  $c = \gamma H / \eta$  求  $c$  值.

## 4 算例

### 4.1 极限高度 $H_m$

文献[2]和文献[3]中极限高度值和本文计算值同列于表 1. 依据文献[3]提供的土强度参数和边坡形状数据, 采用本文提出的方法, 计算得到的极限高度  $H_m$  与文献[3]实验值比较, 其相对误差为 9.7%, 而文献[2]的计算值与文献[3]实验值的相对误差为 12%. 说明本文结果与实验值更接近, 计算方法更合理.

表 1 计算值与离心模型试验值的比较

	边坡形状	土强度参数	极限高度(m)	相对偏差 %
本文计算值	$\alpha = 0$	$c = 23.5 \text{ KPa}$	15.14	9.7
文献[2]计算值	$\beta = 63.4^\circ$	$\varphi = 22^\circ$	15.46	12.0
文献[3]实验值		$\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$	13.80	—

### 4.2 反算 $c, \varphi$ 值

从文献[4], [5]提供的甘肃省酒勒山滑坡前后的地质剖面图(图 4)估计, 裂缝距坡肩水平距离平均值为 50~60 m 左右, 滑坡极限高度综合两文献[4, 5]资料介绍, 估计为 300 m 左右, 边坡平均坡角为  $40^\circ \sim 45^\circ$  左右. 这里没有考虑水压力的影响及其它因素的影响. 按图 3 查得  $\varphi = 17^\circ \sim 23^\circ$ , 再由图 2 得  $c = 225 \sim 390 \text{ kPa}$ . 与文献[5]试验结果相比  $\varphi$  值比较接近,  $c$  值偏高.

从文献[6]提供的浙江衢州市七七一工程滑坡地质图(图 5)知, 该滑坡的极限高度为 50 m, 裂缝距坡肩距离约 4~5 m, 坡角约  $30^\circ$ . 按本文方法从图 3 查得  $\varphi = 18 \sim 20^\circ$ , 再由图 2 得  $c = 21 \sim 24 \text{ kPa}$ .  $\varphi$  值与文献[6]列出的实验值比较接近, 而  $c$  值偏高.

应该指出的是, 以上两个滑坡实例在反算  $c, \varphi$  值时, 均未考虑水压力影响, 因此求得的  $c$  值偏高. 另外, 由于文献提供的裂缝距坡肩位置不十分确切, 只能以估计值进行反算  $\varphi$ , 其值

与实测值不会完全一致。

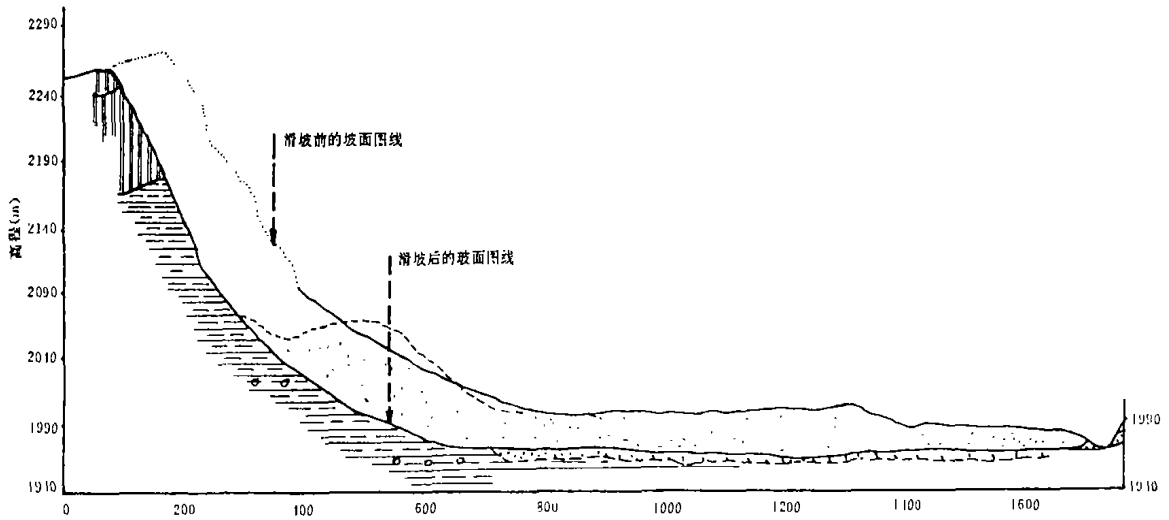


图 4 洒勒山滑坡主坡面图

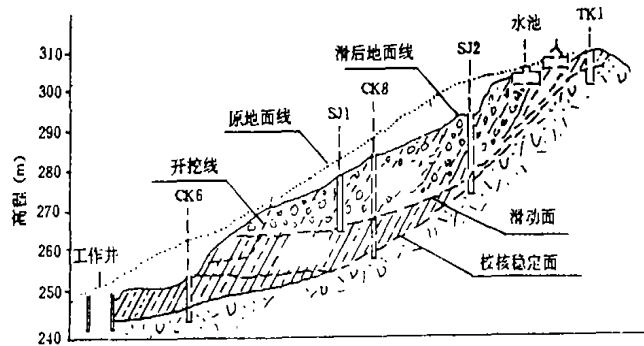


图 5 771 工程南山滑坡区工程地质图

### 5 讨论

1) 边坡的临界高度是一个变边界问题。不仅边坡的高度是待定的，滑面的形状和位置也是未知的，因而采用极限平衡的条分法或采用有限元法等通用的方法都遇到很大的困难。当滑动面的形状已知时，如假定的圆弧或对数螺旋线，可以转化为函数求极值的问题(其中包括三个参变量)，但一般都只能满足转动的平衡条件；若采用变分法，则可以确定滑动面的形状和位置，满足所有的平衡条件，还可以确定滑动面上的应力分布，因而是很有发展前途的。

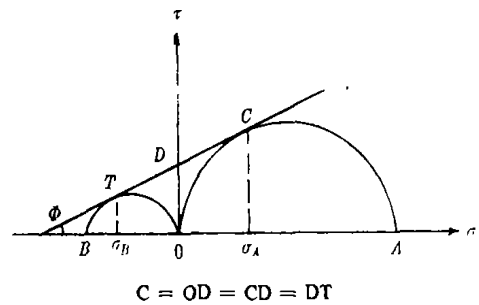


图 6 滑动面端点应力图

2) 滑坡的反分析中，虽然滑动面的端点是易于确定的，但滑面的形状仍是待定的。本文提出的反分析是一种直接解法，可以采用寻求临界高度的同一计算程序绘制关系曲线，以便于实际应用。为了简化，本文只研究一种简单的情况，也没有考虑地下水和降水的影响。但是根据文中阐述的原理，不难加以推广到分块均质岩土或成层土问题，并可采用数值积分法求解非线性本构关系的临界高度，但由于计算较复杂，将另行研究。

3) 在采用变分法进行边坡的稳定分析时,目前尚存在如何满足滑动面两个端点的面力边界问题,按照莫尔库伦准则可绘于图 6.

根据坡顶的自由面力条件和拉裂缝的存在,显然,坡顶裂缝点的临界应力状态用  $T$  代表.但是裂缝很可能不是剪坏而是拉坏(用  $B$  代表).拉坏后裂缝面上面力或者变为零,或者存在渗水压力.滑坡坡址亦为自由面力条件,其应力状态应用莫尔圆  $OCA$ (见图 6)代表,沿坡面的应力即为材料的单轴强度(用  $A$  代表),从前面的算例中知,坡址处的  $\sigma$  远比  $\sigma_a$  大,为了使变分法满足问题的边界条件,显然尚待进一步的研究.

### 参 考 文 献

- 1 Chen W F et al. Limit Analysis in Soil Mechanics and its Application to Lateral Earth Pressure Problems. Sijthoff and Noordhoff, 1975
- 2 吴世明等. 土坡稳定的非线性极限分析. 岩土工程学报, 1987, 6, 27~38
- 3 姜朴等. 几种土工问题的离心模型试验, 水利学报, 1985, 7, 6~12
- 4 Su Baliry et al. Verification of the Sala Mountain Landslide with the Variational Method. 复杂岩石中的建筑物国际学术讨论文集, 中国, 北京, 1986
- 5 Wang Jiading et al. The study of sliding locus for landslide Mass. 国际滑坡和地质会议论文集, 武汉, 1991
- 6 王和章, 钟侠文. 771 工程南山滑坡稳定性的工程地质评价, 滑坡论文集, 北京: 铁道出版社, 1992

(编辑: 徐维森)

## SEVERAL PROBLEMS ON BACKANALYSIS OF LANDSLIDE WITH A VARIATIONAL METHOD

*Zhu Fan*

(Faculty of Civil Engineering)

**ABSTRACT** The shape, position and stress distribution on the sliding surface can be rationally determined by a variational method. And the method satisfies the equilibrium, yield condition and the transversal conditions for the unknown position to determine the critical height of a slope when the slope angles and the material parameter  $C$  and  $\varphi$  are known. This paper corrects some errors existing in the current literature and presents two curves to facilitate determination of the critical height and the cracking position appearing on the top surface of the slope. These curves are particularly suited to backanalysis of landslide when the cracking position, the originally slope angle and the failed slope height are known or can be estimated. Finally, calculated examples are compared with current literature.

**KEY WORDS** a variational method, backanalysis of landslide, landslide