第16卷 第1期
1994年3月

重庆建筑大学学报
Journal of Chongqing Jianzhu University

Vol. 16 No. 1
Mar. 1994

关于微分方程 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x,y)$ $\dot{y}=h(y)-g(x)$ 极限环的存在性*

张 谋

(基础科学系)

摘 要 用环域定理,给出如下一般形式微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\varphi(y)-F(x,y)\\ \dot{y}=h(y)-g(x)\end{cases} \tag{1}$$

的极限环存在的一些充分条件,其结果可以导出文[1]的定理3.

关键词 环域定理, 极限环

中图法分类号 O175

1 准备工作

本文设方程(1)中的函数均连续,并保证初值问题的解存在唯一,同时设方程(1)有唯一的奇点 $O(0,0)$, $\lambda(x,y)=\int_0^x g(x)\mathrm{d}x+\int_0^y \varphi(y)\mathrm{d}y$.

引理 设方程(1)中的函数满足:

1) $xg(x)>0 \quad (x\neq 0)$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$;

2) $y\varphi(y)>0 \quad (y\neq 0)$, $\quad \lim\limits_{y\to\infty}\varphi(y)=\infty$;

3) 存在 $M>0$, $0<K_1(y)=\inf\limits_{x\geqslant M}\{F(x,y)\}$ $\quad 0>K_2(y)=\sup\limits_{x\leqslant -M}\{F(x,y)\}$, $K_3(y)=\operatorname{Max}\limits_{|x|\leqslant M}\{|F(x,y)|\}$ 使得 $\lim\limits_{y\to\pm\infty}|K_3(y)/\varphi(y)|<1$;

$F(0,y)=0 \quad -\infty<y<+\infty$;

4) 存在 $N>0$,当 $y\geqslant N$ 时 $h(y)<0$,当 $y\leqslant -N$ 时 $h(y)>0$,则在正 y 轴上必存在点 P、使过点 P 的方程(1)的正半轨 γ_P^+,在进入右半平面后,或者趋向于原点,或者与负 y 轴相交;同时在负 y 轴上也同样存在点 Q、使过点 Q 的方程(1)的正半轨 γ_Q^+,在进入左半平面后,或者趋向于原点,或者再与正 y 轴相交。

证明 记 $\max\limits_{|y|\leqslant N}|h(y)|=H$,由条件1)知存在 $D_1>0$,使 $|x|>D_1$ 时 $|g(x)|>H+1$. 由条件2)、3)知存在 $D_2>0$,当 $|y|>D_2$ 时 $|\varphi(y)|>|K_3(y)|+1$,若 $|y|>D_2$ 同时 $|x|\leqslant M$ 则有 $|\varphi(y)|>|F(x,y)|+1$.

---

* 收稿日期:1993-06-30.

张 谋.男,1963年生,助教,重庆建筑大学(630045).

取 $B=\max\{D_1,M\}$，$A=\max\{D_2,N\}$。在正 y 轴上取一点 $P(0,y_p)$，$y_p>A$，过 P 作方程(1)之正半轨 γ_P^+，因在正 y 轴上 $\dot{x}=\varphi(y)-F(0,y)=\varphi(y)>0$ 且在区域 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant M,y>A\}$ 中，$\dot{y}=h(y)-g(x)<0$，$\dot{x}=\varphi(y)-F(x,y)>1$，因此 γ_P^+ 必与 $x=M$ 交于一点 $S(M,y_s)$，$y_p>y_s>A$（当 y_p 充分大时就能保证 $y_s>A$）。

在角形区域 $\{(x,y)|x\geqslant M,y\geqslant N\}$ 及 $\{(x,y)|x\geqslant M,y\leqslant -N\}$ 中，因 $\frac{d\lambda}{dt}|_{(1)}=\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)\leqslant\varphi(y)h(y)-g(x)k_1(y)<0$，故进入其中的轨线不可能在这两个角形区域中趋向于无穷远处。

在半带形区域 $\{(x,y)|x\geqslant M,|y|\leqslant N\}$ 中，因 $\dot{y}=h(y)-g(x)<-1$，所以保持在此区域中的轨线经有限时间后必与 $y=-N$ 相交，不可能在此区域中趋向于无穷远处。

在区域 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant M,y\leqslant -N\}$ 中，因 $\dot{x}=\varphi(y)-F(x,y)<-1$，故在此区域内的轨线也不可能趋向于无穷远处。

由以上的讨论知，从 P 点进入右半平面的正半轨线 γ_P^+ 既不能趋向于无穷远处，又不能向左穿过正 y 轴，因此当 t 增加时，γ_P^+ 或者走向唯一的奇点 $O(0,0)$，或者从右向左穿过负 y 轴而进入左半平面。

同理可证引理的另一部分结论。

2 主要结果

定理 设方程(1)满足：

1) $xg(x)>0\quad(x\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$；

2) $y\varphi(y)>0\quad(y\neq 0)$，$\lim\limits_{y\to\infty}\varphi(y)=\infty$；

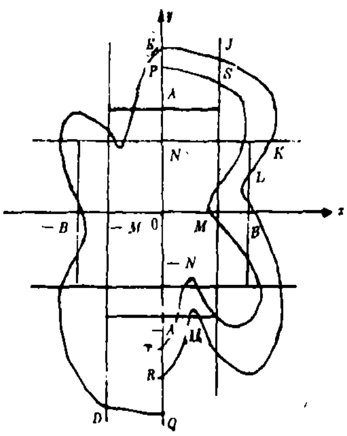
3) 存在 $\delta>0$ 使当 $0<x^2+y^2<\delta^2$ 时 $xF(x,y)<0$，当 $0<|y|<\delta$ 时 $yh(y)>0$，$F(0,y)=0$，$-\infty<y<+\infty$；

4) 存在 $M>0$，$0<k_1(y)=\inf\limits_{x\geqslant M}\{F(x,y)\}$，$0>k_2(y)=\sup\limits_{x\leqslant -M}\{F(x,y)\}$，$k_3(y)=\operatorname*{Max}\limits_{|x|\leqslant M}\{F(x,y)\}$，使得 $\lim\limits_{y\to\pm\infty}|k_3(y)/\varphi(y)|<1$ 且 $\int_0^{+\infty}k_1(y)dy-\int_{-\infty}^0 k_2(y)dy=+\infty$；

5) 存在 $N>0$，当 $y\geqslant N$ 时 $h(y)<0$，当 $y\leqslant -N$ 时 $h(y)>0$，则方程(1)必有极限环。

证明 设 $C>0$ 但充分小使曲线 $\lambda(x,y)=C$ 在域 $x^2+y^2<\delta^2$ 之中，由条件 1)2)3) 知 $\frac{d\lambda}{dt}|_{(1)}=\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)\geqslant 0$，当 $x^2+y^2<\delta^2$ 时，因此 $\lambda(x,y)=C$ 可作为环域的内境界线。

下面构造环域的外境界线，仍采用引理的记号。由于唯一的奇点 $O(0,0)$ 是不稳定的奇点，由引理知 γ_P^+ 必经右半平面与负 y 轴交于一点 $T(0,y_T)$，在负 y 轴上取一点 $Q(0,y_Q)$，$y_Q<y_T$，$y_Q<-A$，方程(1)的正半轨线 γ_Q^+ 必经左半平面再与正 y 轴交于一点 E，如图。



若 $y_E\leqslant y_P$，则取 $\widehat{PST}\cup\overline{TQ}\cup\widehat{QDE}\cup\overline{EP}$ 作为环域的外境界线。否则把 γ_Q^+ 从 E 点再往前延拓，必经右半平面后再与负 y 轴交于一点 $R(0,y_R)$，可以证明 $y_R>y_Q$ 当 $|y_Q|$ 充分大时，因此

可取$Q\widehat{ER}\cup\overline{RQ}$作为环域的外境界线。

下面证明总可以有$y_R>y_Q$.

因为$\partial\lambda/\partial y=\varphi(y)<0$,当$y\leqslant -N$时,故要证$y_R>y_Q$只须证明$\lambda_R<\lambda_Q$.设$\gamma_Q^+$在$E$之后与$x=M$交于$J$点,与$y=N$交于$K$点,此后与$x=B$的第一个交点为$L$,在$R$之前与$y=-A$的最后一个交点为$u$.

设　$\max\limits_{|x|\leqslant B}|g(x)|=G,\max\limits_{|y|\leqslant A}|\varphi(y)|=\Phi,f^+(x)=\begin{cases}0 & 当\ f(x)<0\ 时\\ f(x) & 当\ f(x)\geqslant 0\ 时\end{cases}$,$\mathrm{d}\lambda=[\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)]\mathrm{d}t=\dfrac{\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)}{\varphi(y)-F(x,y)}\mathrm{d}x=\dfrac{\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)}{h(y)-g(x)}\mathrm{d}y$,由条件 4) 知存在$N>0$和$\varepsilon>0$,当$|y|\geqslant N$时

$$|k_3(y)/\varphi(y)|<1-\varepsilon\quad 即有\quad 1-k_3(y)/\varphi(y)|\geqslant|K_3(y)/\varphi(y)|>\varepsilon$$

(为了简洁起见取此处的N与条件 5°中的N相同)所以

$$\lambda_R-\lambda_u=\int_{x_u}^{0}\frac{\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)}{\varphi(y)-F(x,y)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^M\frac{[\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)]^+}{|\varphi(y)-F(x,y)|}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^M\frac{|g(x)||F(x,y)|}{|\varphi(y)-F(x,y)|}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^M\frac{|g(x)||F(x,y)/\varphi(y)|}{1-|F(x,y)/\varphi(y)|}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^M\frac{|g(x)||k_3(y)/\varphi(y)|}{1-|k_3(y)/\varphi(y)|}\mathrm{d}x\leqslant MG(1-\varepsilon)/\varepsilon$$

$$\lambda_U-\lambda_L=\int_{x_L}^{x_u}g(x)\mathrm{d}x+\int_{y_L}^{y_u}\varphi(y)\mathrm{d}y=\int_B^{x_u}g(x)\mathrm{d}x+\int_{y_L}^{-A}\varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\int_{-B}^{B}|g(x)|\mathrm{d}x+\int_{-A}^{A}-|\varphi(y)|\mathrm{d}y\leqslant 2(\varphi A+GB)$$

$$\lambda_L-\lambda_{K'}=\int_{y_k}^{y_L}\frac{\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)}{h(y)-g(x)}\mathrm{d}y\leqslant\int_{y_L}^{N}\frac{[\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)]^+}{g(x)-h(y)}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\int_{-N}^{N}|\varphi(y)h(y)|\mathrm{d}y\leqslant 2\varphi HN$$

$$\lambda_K-\lambda_J=\int_N^{y_J}\frac{\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)}{g(x)-h(y)}\mathrm{d}y\leqslant\int_{y_J,N}\frac{-g(x)F(x,y)}{g(x)}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant-\int_N^{y_J}k_1(y)\mathrm{d}y$$

$$\lambda_J-\lambda_E=\int_0^M\frac{\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)}{\varphi(y)-F(x,y)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^M\frac{[\varphi(y)h(y)-g(x)F(x,y)]^+}{|\varphi(y)-F(x,y)|}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^M\frac{|g(x)F(x,y)|}{|\varphi(y)-F(x,y)|}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^M\frac{|g(x)||k_3(y)/\varphi(y)|}{1-|k_3(y)/\varphi(y)|}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant MG(1-\varepsilon)/\varepsilon$$

累加上述各式得:

$$\lambda_R - \lambda_B \leqslant 2MG(1-\varepsilon)/\varepsilon + 2(\varphi A + GB) + 2\varphi HN - \int_N^{y_J} k_1(y)\mathrm{d}y$$

同法估计得:

$$\lambda_B - \lambda_Q \leqslant 2MG(1-\varepsilon)/\varepsilon + 2(\varphi A + GB) + 2\varphi HN - \int_{y_Q}^{-N} k_2(y)\mathrm{d}y$$

所以 $\lambda_R - \lambda_Q \leqslant 4[MG(1-\varepsilon)/\varepsilon + \varphi A + GB + \varphi HN] - (\int_N^{y_J} k_1(y)\mathrm{d}y - \int_{y_Q}^{-N} k_2(y)\mathrm{d}y)$

当 $|y_Q|$ 充分大时 $\lambda_R - \lambda_Q < 0$,即 $\lambda_R < \lambda_Q$. 本定理得证。

易知当 $F(x,y) = F(x)$ 时本定理即为文[1]的定理 3.

例 微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - (x^3 + xy^2 - x) \\ \dot{y} = y^3 - x^3 \end{cases}$$

有唯一的奇点 $O(0,0)$,易验证满足定理条件,故上方程存在极限环。

衷心感谢陈均平教授对本文的热情指导。

参 考 文 献

1 吴葵光. 数学进展. 25:1982,456~463

2 Liu Chaojie. Ann. of diff. Eqs. 1987,3(4)

(编辑:姚国安)

ON THE EXISTENCE OF LIMIT CYCLES OF A CLASS NONLINEAR EQUATION

Zhang Mou

(Dept. of Natural Science)

ABSTRACT This paper uses the Poincare-Bendixson' s annular region theorem with existence of limit cycles of a class of nonlinear differential equation.

KEY WORES annular region theorem, limit cycles, nonlinear differential equation