(5)

第 17 卷 第 1 期
1995 年 3 月

重庆建筑工程学院学报
J. Chongqing Inst. of Archit & Engin.

Vol. 17 No. 1
Mar. 1995

32—36

平面自治系统的周期解的存在性*

杨启贵
(重庆大学)

张 谋
(重庆建筑大学)

O175.12

摘 要 本文研究一般平面自治系统

$$\dot{x}=P(x,y)\qquad \dot{y}=Q(x,y)$$

的非零周期解的存在性问题，获得了保证此系统存在非零周期解的充分条件，所得结果推广和改进了一些已知结论。

关键词 平面自治系统，存在性，周期解、连续函数

中图法分类号 O175.12

引 言

Liénard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$$

及广义 Liénard 方程由于它们在理论和应用上都有十分重要意义，因此引起了许多工程人员和数学工作者的高度重视，对于这类特殊系统的周期性的研究，取得了丰富的成果（如[1～4]），而且不少人还将这些工作应用于解决电磁振荡、生态平衡和机械振动等实际问题。然而，一方面，在众多的研究中，对于一般自治系统的已知结果却相对较少[5～6]，虽然文[5～6]得到较好的一般非零周期解的充分条件，但[5]只是奇点为源或穴的闭轨存在条件，而[6]要去寻找其构造的辅助函数亦非易事；另一方面，将一些特殊系统的结论推广到一般自治系统不仅有其理论价值，而且在实践中也有其重要作用。因此，本文目的是利用一般自治系统

$$\dot{x}=P(x,y)\qquad \dot{y}=Q(x,y) \tag{1}$$

本身去构造一个函数，采用不同于[5～6]的方法来探讨(1)的非零周期解存在性，所得结果推广和改进了[3～4]的工作。

本文中均设 P、$Q:R^2\to R$ 连续，且保证系统(1)的初值问题的唯一性。

记 $f(x,y)=[Q(x,y)-Q(x,0)]/P(x,y)$

总设

$$(Y_0)\quad yP(x,y)>0(y\neq 0),\ \lim_{|y|\to+\infty}|P(x,y)|>0$$

(Y_1) 当 $|X|$ 充分大时，存在连续函数 $P_1(y)$、$P_2(y)$ 使

$$P_1(y)\leqslant P(x,y)\leqslant P_2(y)$$

---

* 收稿日期：1994-06-26

杨启贵，男，1965 年生，研究生，重庆大学应用数学系.

(Y_2)　$xQ(x,0) < 0(x \neq 0)$，$\int_0^{+\infty} Q(x,0)\mathrm{d}x = -\infty$

(Y_3)　(i) $\forall\ h^+: R^+ \to R^+$ 连续，$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \int_0^x f(s,h^+(s))\mathrm{d}s < +\infty$

(ii) $\forall\ h^-: R^- \to R^-$ 连续，$\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \int_0^x f(s,h^-(s))\mathrm{d}s > -\infty$

为了简化 §2 的定理证明，先介绍下面的引理。

引理　若(Y_0)满足，则系统(1)没有垂直渐近线。

证　只证(1)的任何正半轨不存在垂直渐近线即可。类似方法可证任何负半轨也不存在垂直渐近线。

假设矛盾，那么至少存在一正半轨有垂直渐近线，记这样的正半轨为γ^+，且其参数方程为$x = x(t), y = y(t)$，易证存在t_0使得当$t \geqslant t_0$时有$y(t) > 0$(或$y(t) < 0$)，沿γ^+从t_0到$t \geqslant t_0$对$\frac{dx}{dt} = P(x,y)$积分得

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} P(x(t),y(t))dt$$

由此，根据(Y_0)知，当$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty(-\infty)$时可导出$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty(-\infty)$，这明显与$\gamma^+$有垂直渐近线矛盾。

1　证明

定理 1　若$(Y_0) \sim (Y_3)$成立，且

(Y_4)　系统(1)的奇点为局部排斥(repulsive)

(Y_5)　$\exists\ a < 0, K > 0$使得对$x \leqslant a$有

$$Q(x,k) \leqslant 0$$

则系统至少有一个非零周期解。

证　由(Y_0)、(Y_2)知系统(1)有唯一奇点$O(0,0)$，记(1)过点$A_1(a,K)$的正半轨$\gamma_{A_1}^+$在时刻t的坐标为$(x(t),y(t))$，下面分五个步骤完成定理证明。

1) $\gamma_{A_1}^+$必与正y半轴相交某点A_2

否则，根据(Y_0)，(Y_2)知当$y(t) > 0$时

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(x(t),y(t)) > 0$$

及$\frac{dy(t)}{dt} = Q(x(t),y(t)) < 0$有$\gamma_{A_1}^+$走向只能停留在区域$D_1 = \{(x,y) | a < x < 0, y > 0\}$，由于在$D_1$内，系统(1)无奇点及$(Y_4)$可得$\gamma_{A_1}^+$无界，又在区域$D_1$内$\frac{dx}{dt} = P(x,y) > 0$，这样$\gamma_A^+$必存在垂直渐近线，这与引理矛盾；

2) $\gamma_{A_2}^+$必交正x半轴于某点A_3

假若$\gamma_{A_2}^+$不与x正半轴相交，则γ_A^+将停留在区域$D_2 = \{x,y) | x > 0, y > 0\}$，根据$D_2$中无

奇点，$\frac{dx}{dt}=P(x,y)>0$，从而 $\gamma_{A_2}^+$ 无界；又由引理知系统(1) 无垂直渐近线，由此，$\gamma_{A_2}^+$ 的走向只能是下列两种之一：

(1) $x(t)\to+\infty$，$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=+\infty$

(2) $x(t)\to+\infty$，$y(t)<+\infty$

若(1) 或(2) 成立，由 $yP(x,y)>0(y\neq 0)$，就 $x(t)>K$ 对任意 $t>t_1$，对方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}=f(x,y)+\frac{Q(x,0)}{P(x,y)}\leqslant f(x,y)$$

沿 $\gamma_{A_3}^+$ 从 K 到 $x(t)\geqslant K$ 积分得

$$y(t)\leqslant y(t_1)+\int_{t_1}^{t}f(x(s),y(s))ds\quad t\geqslant t_1$$

$$=y(t_1)+\int_{x(t_1)}^{x(t)}f(z,y(x^{-1}(z))dz$$

根据$(Y_3)(i)$，若 $x(t)\to+\infty$ 成立，则 $y(t)$ 有界，从而情形(i) 不可能。

下证情形(ii) 也不可能

否则，由 $0<y(t)<+\infty$，存在 $M>0$ 使得 $0<y(t)\leqslant M$ 对 $t\geqslant t_1$，根据(Y_1) 可令

$$N=\sup_{-\infty<x<+\infty}\begin{Bmatrix}max\{P(x,y)\}\\0\leqslant y\leqslant M\end{Bmatrix}$$

再由系统(1) 及(Y_2) 可得

$$\frac{dy(t)}{dx(t)}=f(x(t),y(t))+\frac{Q(x(t),0)}{p(x(t),y(t))}$$

$$\leqslant f(x(t),y(t))+\frac{1}{N}Q(x(t),0)$$

于是当 $t\geqslant t_1$ 时沿 $\gamma_{A_3}^+$ 积分有

$$y(t)\leqslant y(t_1)+\int_{x(t_1)}^{x(t)}f(z,y(x^{-1}(z))dz+\frac{1}{N}\int_{x(t_1)}^{x(t)}Q(s,0)ds$$

根据(Y_2)、$(Y_3)(i)$ 得当 $t\to+\infty$ 时，有 $y(t)\to-\infty$，这与 $y(t)>0$ 矛盾；

3) 类似第一步证明 $\gamma_{A_3}^+$ 必与 y 负半轴交点 A_4；

4) $\gamma_{A_4}^+$ 必交 x 负半轴于某点 A_5，类似第二步证明；

5) 构造闭曲线 L 使得当 t 增加时，在 L 内的正半轨均不能从 L 内部走向外部。

设 A_5 的坐标为$(x_{A5},0)$，若 $a\leqslant x_{A5}<0$，过 A_5 作 x 轴垂线交系统(1) 的轨线$\widehat{A_1A_2}$ 于 A_6，则在$\overline{A_5A_6}$ 上有$\frac{dx}{dt}>0$，从而 $L=\widehat{A_6A_2A_3A_4A_5}\cup\overline{A_5A_6}$；若 $x_{A5}<a$，过 A_5 作 x 轴垂线交直线 $y=k$ 于点 A_7，则在$\overline{A_5A_7}$ 上有$\frac{dx}{dt}>0$，在$\overline{A_7A_1}$ 上根据(Y_5) 得$\frac{dy}{dt}\leqslant 0$，由此 $L=\widehat{A_1A_2A_4A_5}\cup\overline{A_5A_7}\cup\overline{A_7A_1}$。

综上根据(Y_1) 再结合 Bendixson 定理[7] 知系统(1) 至少有一非零周期解。

类似可证

定理 2 若$(Y_0)\sim(Y_4)$ 满足，且

$(Y_6)\exists\ b>0,k>0$ 使得对 $x\geqslant b$ 有

$$Q(x,k) \geqslant 0$$

则系统(1)至少有一个非零周期解。

2　举例

附注 1　若原点是源或 $f(x,y) \geqslant 0, \not\equiv 0, x[P(x,y) - P(0,y)] \geqslant 0$，当 $0 < |x|、|y| \ll 1$ 时，则 (Y_0)、(Y_2) 成立时 (Y_4) 成立。

事实上，取 $\lambda(x,y) = \int_0^y P(0,y)dy - \int_0^x Q(x,0)dx = C$，则当 $0 < C \ll 1$ 时

$$\left.\frac{d\lambda}{dt}\right|_{(1)} = -Q(x,0)[P(x,y) - P(0,y)] + P(0,y)P(x,y)f(x,y) \geqslant, \not\equiv 0$$

由此原点是局部排斥，若为源时，明显成立，故 (Y_4) 成立。

附注 2　若系统(1)为下列特殊系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x,y)y - g(x) \end{cases} \tag{2}$$

则结合附注 1 得本文结果推广和改进[3～4]的工作。

附注 3　若 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 解析，则根据[2]定理 1.5 及本文定理 1～2，得满足 (Y_0)～(Y_4)、(Y_5) 或 (Y_6) 的系统(1)至少有一个稳定的极限环。

下面考虑系统(1)的特殊系统

$$\begin{cases} \dot{x} = h(y)\varphi(x) \\ \dot{y} = -f(x)h(y) - g(x)q(y) \end{cases} \tag{3}$$

其中 h、φ、f、g：$R \to R$ 连续且满足解的唯一性，则有下面的推论。

推论　若系统(3)满足

1) $yh(y) > 0(y \neq 0), q(y) > 0, \lim\limits_{|y| \to +\infty} \left|\frac{h(y)}{q(y)}\right| > 0$

2) $xg(x) > 0(x \neq 0), \varphi(x) > 0, \int_0^{\pm\infty} \frac{g(x)}{\varphi(x)}dx = \pm\infty$

3) $\lim\limits_{x \to \infty}\int_0^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} sgnx dx < +\infty$

4) $f(x) \leqslant 0, \not\equiv 0, 0 < |x| \ll 1$

5) $\exists\, a^* < (>)0, K > 0$ 使 $x \leqslant (\geqslant) a^*$ 有

$$f(x)h(k) + g(x)q(k) \geqslant (\leqslant) 0$$

则(3)至少有一个非零周期解。

证　考虑(3)的等价系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{h(y)}{q(y)} \\ \dot{y} = -\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \dfrac{h(y)}{q(y)} - \dfrac{g(x)}{\varphi(x)} \end{cases}$$

结合定理 1～2 及附注 1 立得。

例　考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = -(x^2-4)(e^{-y^2}+1)P(x,y) - x\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$p(x,y) = \begin{cases} a_1 y^n\left(2 + \dfrac{\sin x}{1+y^2}\right) & ,y > 0 \\ a_2 y^n & ,y \leqslant 0 \end{cases}$$

n 为正奇数，$a_1 \geqslant 1, a_2 > 0$。

则系统(4)至少有一个非零周期解。

易验证系统(4)满足定理1条件。

事实上，在系统(4)中相当于

$$P(0,y) = \begin{cases} 2a_1 y^n, & y > 0 \\ a_2 y^n, & y \leqslant 0 \end{cases}, Q(x,0) = -x$$

$$f(x,y) = -(x^2-4)(e^{-y^2}+1)$$

易知(Y_0)～(Y_2)成立，通过简单计算(Y_3)满足

又 $f(0,0) = 8$

$$x[P(x,y) - P(0,y)] = \begin{cases} \dfrac{a_1 y^n}{1+y^2} \cdot x\sin x & ,y > 0 \\ 0 & ,y \leqslant 0 \end{cases}$$

当 $0 < |x|, |y| \ll 1$ 时，根据附注1知(Y_4)成立。

取 $a = -1, K = 1$，则(Y_5)满足。

故系统(4)至少有一个非零周期解。

感谢导师陈均平教授的关心与帮助。

参 考 文 献

1 张芷芬等. 微分方程定性理论. 科学出版社. 1985

2 叶彦谦. 极限环论. 上海科学技术出版社, 1984

3 [illegible] Periodic Solutions of generalized Lienard equations. J. Math. Anal. Appl., 1984, 104: 117～12[illegible]

4 Zheng Zuochuan. Periodic Solutions of generalized equations. J. Math. Anal. Appl., 1990, 148: 1～10

5 李森林, 黄立宏. 平面自治系统极限环的存在性及解的有界性. 湖南大学学报, 1993, 20(1): 1～8

6 Huang Lihong, Yu Jianshe & Qian Xiangzheng. Boundedness of Solutions and Existence of Periodic Solutions for Autonomous Planar Systems. Ann. of Diff. Eqs., 1993, 9(4): 425～432

7 王联, 王慕秋. 非线性常微分方程定性分析. 哈尔滨工业大学出版社, 1987, 43

8 Yu Jianshe, Huang Lihong. Existence of Periodic Solution of Generalized Lienard System. Ann. of Diff. Eqs., 1993, 9(3): 562～586

(编辑：姚国安)

(下转 85 页)