

(16)

研究简报

98-102

奇数阶幻方的编制

章长才
(基础科学系) 0157

A摘要 将幻方的编制进行分类,使得各类的编制都简单易行,由于各类的编制方法及论证方法均不一样,故作为两文分别论述,首先研究奇数阶幻方的编制。

关键词 幻方, 幻和, n 阶自然数表, $n+i$ 移数法, 对换 **奇数阶幻方. 编制**
中图法分类号 O157

1 基本概念及简单实例

1.1 基本概念

幻方 幻和(见文献2)

n 阶自然数表 将 n^2 个自然数 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 按由小到大的顺序排在一个 n 行 n 列的正方形内,该表叫一个 n 阶自然数表。如图1所示,为一个五阶自然数表。

$n+i$ 移数法 将第 i 行(列)的数垂直(水平)地移到第 $n+i$ 行(列)。将倒数第 i 行(列)的数垂直地(水平)地移到倒数第 $n+i$ 行(列)。

对换 将某行中,以中心对称的元素互换位置,叫将该行的元素对换,对列也有同样定义。

1.2 简单实例

为直观起见,先看看五阶幻方的编法。

1) 作5阶自然数表图1。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

图 1

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

图 4

* 收稿日期:1994-09-06

章长才,男,1937年生,副教授,重庆建筑大学基础科学系(630045)

			5						
			4	10					
			3	9	15				
	2		8	14	20				
1			7	13	19	25	1		
	6		12	18	24				
			11	17	23				
			16	22					
			21						

图 3

			5						
			4	10					
			3	9	15				
	2		8	14	20				
1			7	13	19	25	1		
	6		12	18	24				
			11	17	23				
			16	22					
			21						

图 2

2) 将图 1 以两条对角线的交点为中心旋转 $\frac{\pi}{4}$, 再置于 $(2 \times 5 - 1)$ 格 (一般情况为 $2n - 1$ 格) 的正方表中, 得图 2, 图 2 有两个重要的性质:

(1) 图 2 中每一行(列)的元素由图 1 中不同行不同列的元素组成;

(2) 图 2 中每一行(列)两个元素之间有一个空格。

3) 以图 2 的中心格(含数字 13 的格)为中心, 作一个 5 行 5 列(一般为 n 行 n 列)的正方表, 如图 3 所示。图 3 有一个重要的性质: 正方表内有 $\frac{n^2+1}{2}$ 个数字, 正方表外有 $\frac{n^2-1}{2}$ 个数字, 且这 $\frac{n^2-1}{2}$ 个数以 $n+i$ 移数法的规律与正方表内的 $\frac{n^2-1}{2}$ 个空格一一对应(本题 $n=5$)。

4) 用 $n+i$ 移数法将图 3 中正方表外的数全部移到正方表内, 则正方表内的数为一个 5 阶幻方, 如图 4 所示, 其幻和为 $S=65$ 。

2 编制奇阶幻方的数学原理及方法

1) 作 n 阶自然数表图 5, 图 5 有下列重要性质

定理 1 n 阶自然数表中的 n^2 个自然数之和为 $1+2+\dots+n^2=\frac{n^2(1+n^2)}{2}$, 若将这 n^2 个数重新排列在这 n 行 n 列的表格中成为 n 阶幻方, 则幻和为 $S=\frac{n^2(1+n^2)}{2n}=\frac{n(1+n^2)}{2}$

定理 2 n 阶自然数表图 5 中的中间行(第 $\frac{n+1}{2}$ 行), 中间列(第 $\frac{n+1}{2}$ 列)的 n 个数之和均为幻和 S 。

证 第 $\frac{n+1}{2}$ 列上的 n 个数之和为 $\frac{n+1}{2} + \left(n + \frac{n+1}{2}\right) + \left(2n + \frac{n+1}{2}\right) + \dots + \left[(n-1)n + \frac{n+1}{2}\right] = n \cdot \frac{n+1}{2} + n(1+2+\dots+n-1) = n \cdot \frac{n+1}{2} +$

$$n \left[\frac{n(1+n)}{2} - 1 \right] = \frac{n(n+1)}{2} [1+n] - n = \frac{n}{2} (1+n^2) = S.$$

对中间行同理可证。

1	2	...	j	...	n
$n+1$	$n+2$...	$n+j$...	$2n$
...
$(i-1)n+1$	$(i-1)n+2$...	$(i-1)n+j$...	in
...
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$...	$(n-1)n+j$...	n^2

图 5

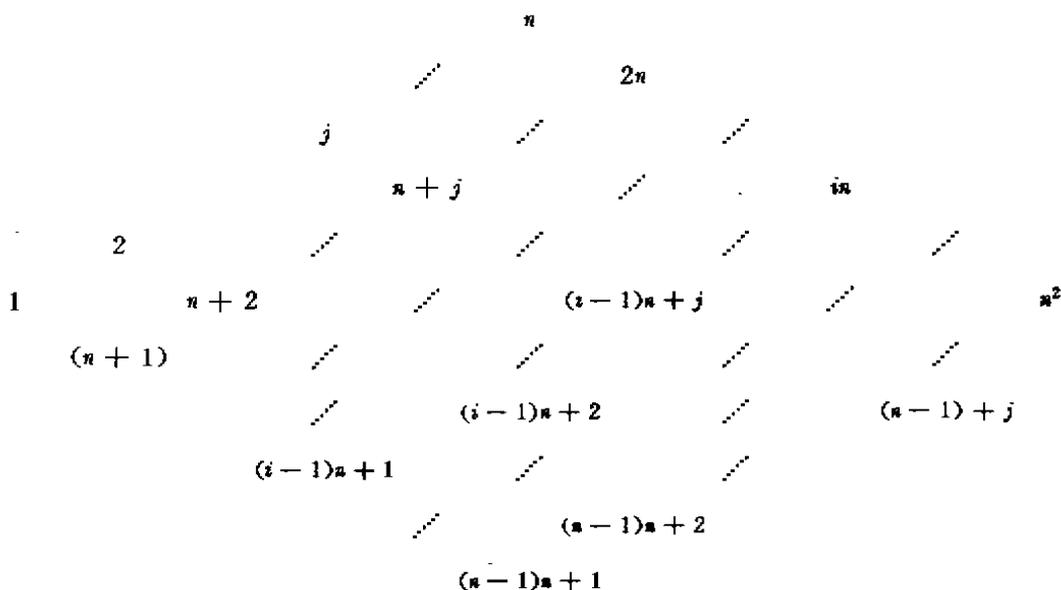


图 6

定理 3 n 阶自然数表中不同行不同列的 n 个数之和为幻和 S 。

证 因图 5 中第 i 行第 j 列的元素为 $(i-1)n+j$, 不同行不同列的 n 个数之和为 $\sum_{i,j=1}^n [(i-1)n+j] = \sum_{i=1}^n (i-1)n + \sum_{j=1}^n j = n(1+2+\dots+n-1) + 1+2+\dots+n = n \left[\frac{n(n+1)}{2} - n \right] + \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(1+n^2)}{2} = S.$

2) 将图 5 以两条对角线的交点为中心旋转 $\frac{\pi}{4}$, 再将其置于 $(2n-1)$ 行, $(2n-1)$ 列的正方形表格中如图 6, 且图 5 与图 6 和图 1 与图 2 有相同的关系

3) 在图 6 中以中心格 (第 n 行第 n 列相交的一格) 为中心, 作一个 n 阶正方形表, 再将正方

表外的 $\frac{n^2-1}{2}$ 个数用 $n+i$ 移数法移到正方表内对应的 $\frac{n^2-1}{2}$ 个空格里。由于上下移数时没有改变元素列的位置,左右平移时没有改变元素行的位置。而图 6 中各行各列的元素是由图 5 中不同行不同列的元素组成的,所以在图 6 内的 n 阶正方表经 $n+i$ 移数法后的新的正方表的每一行(列)的 n 个数也是由图 5 中不同行不同列的元素组成的,由定理 3 知其和为幻和 S ,而该新的正方表中的两条对角线上的元素就是图 5 中第 $\frac{n+1}{2}$ 行(列)上的元素。由定理 2 知其和为幻和 S ,即经 $n+i$ 移数法后新的正方表为一个 n 阶幻方。

3 以 7 阶幻方的编制为例

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

图 7

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

图 9

				7								
				6		14						
				5		13		21				
			4		12		20		28			
			3		11		19		27	35		
			2		10		18		26	34	42	
		1		9		17		25		33	41	49
		8		16		24		32		40		48
		15		23		31		39		47		
		22		30		38		46				
		29		37		45						
		36		44								
		43										

图 8

- 1) 作 7 阶自然数表, 如图 7。
- 2) 将图 7 旋转 $\frac{\pi}{4}$, 再将其置于 $(2 \times 7 - 1)$ 行, $(2 \times 7 - 1)$ 列的正方表格内, 如图 8。
- 3) 以中心格(含数字 25 的格)为中心, 作一个 7 行 7 列的正方形表格。
- 4) 将上面正方形表格外的数用 $a+i$ 移数法移到该正方表内对应的空格上, 则经移数后新的正方表为一个 7 阶幻方, 如图 9 所示。

参 考 文 献

- 1 周振黎, 康泰. 组合数学. 重庆大学出版社, 1960, 4
- 2 温世清, 王利达. 用宏观控制法及自我扩张法编制幻方. 重庆大学学报 1992 年第四期

(编辑: 姚国安)

※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※ ※

(上接 90 页)

参 考 文 献

- 1 建筑给水排水设计规范. GBJ15-88. 北京: 中国计划出版社, 1989
- 2 National Plumbing Code Handbook. V. T. Manas, 1957
- 3 钱维生编著. 高层建筑给水排水工程. 上海: 同济大学出版社, 1989
- 4 建筑排水硬聚氯乙烯管道设计规程. CJJ29-89. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989

(编辑: 胡玲)

THE APPLICATION OF COMPLEMENTARY WET VENT IN DRAINAGE SYSTEM OF HIGHRISE BUILDINGS

Wei Fusen

(Faculty of Urban Construction)

ABSTRACT This paper presents the properties of drainage system and the form of drainage system and analyses the drainage system of highrise residential and hotel buildings. The results of research show that it is suitable to adopt separate system when highrise residential and hotel buildings are not more than twenty floors. It is feasible and economic to adopt the complementary wet vent drainage system rather than the three-pipe system when the diameter of vertical drain is 100 mm.

KEY WORDS highrise building, drainage system form, complementary wet vent