(10) 非线性. 偏微分方程. 径向解. 奇异. 恒等式

第17卷 第4期
1995年12月

重庆建筑大学学报
Journal of Chongqing Jianzhu University

Vol. 17 No. 4
Dec. 1995

73-84

# 方程 $\operatorname{div}(A(|Du|)Du)+f(|x|,u)=0$ 奇异 Dirichlet 问题的正径向解不存在性*

郭百昌
(吉林师范学院)

周祥龙
(浙江师范大学)

柯红路
(重庆建筑大学)

O175.29

**摘 要** 主要讨论一类非线性偏微分方程奇异 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(A(|Du|)Du)+f(|x|,u)=0, x\in R^n\backslash\{0\}\\ u(r)>0, r\in R^+\\ \lim\limits_{r\to 0^+}u(r)=+\infty,\\ \lim\limits_{r\to+\infty}u(r)=0。\end{cases}$$

正径向解的不存在性。

**关键词** 径向解,奇异,恒等式

**中图法分类号** O175.29

研究偏微分方程定解问题的解不存在性,至今已有大量文献,在物理、力学、电学和其它科学中所涉及径向(*radial*)解问题比较多,比如:万有引力、静电场力、电位等,其大小均为径向 $r$ 的函数,且当 $r\to 0^+$ 时,它们均趋于 $+\infty$;当 $r\to+\infty$ 时,它们均趋于零。因此,研究非线性偏微分方程奇异(singular)*Dirichlet* 问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(A(|Du|)Du)+f(|x|,u)=0, x\in R^n\backslash\{0\} & (1)\\ u(r)>0, r\in R^+ & (2)\\ \lim\limits_{r\to 0^+}u(r)=+\infty & (3)\\ \lim\limits_{r\to+\infty}u(r)=0 & (4)\end{cases}$$

在理论和应用上都有意义,上述出现的 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,$r=|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$,正整数 $n>2$,在哪些条件下,定解问题(1)~(4)存在唯一解?通常期望问题正面得到解决。本文主要给出定解问题(1)~(4)不存在径向解的充分条件(定理 3),同时,还讨论了另外两个奇异 *Dirichlet* 问题径向解不存在性,所研究的方程(1)要比之[1]研究的方程更广泛,是[1]工作的继续和深入。

---

* 收稿日期:1995-02-24

郭百昌. 男,1939年生,副教授,吉林师范学院数学系(132011).

记 $R^+=(0,+\infty)$，$\bar{R}^+=[0,+\infty)$，$(R^+)^2=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$，下面条件中出现的 $C_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 均表示正常数。

设条件：

$(L_1)$ $A(P)\in C(\bar{R}^+)$ 且 $0<\delta\leqslant A(P)\leqslant C_1, P\in\bar{R}^+$，这里 $\delta$ 为常数；

$(L_2)$ $f(r,s)\in C^{1,0}((R^+)^2)$ 且存在常数 $b>0$，当 $(r,s)\in(0,b]\times R^+$ 时，有

$$f(r,s)\geqslant C_2S^q$$

这里常数 $q>\frac{n+2}{n-2}$；

$(L_3)$ 当 $P\in\bar{R}^+$ 时，有

$$\int_0^P\rho A(\rho)\mathrm{d}\rho\geqslant C_3A(P)P^2, 0<C_3\leqslant\frac{1}{2}；$$

$(L_4)$ $f_r(r,s)\leqslant 0, (r,s)\in(R^+)^2$；

$(L_5)$ 当 $(r,s)\in(R^+)^2$ 时，有

$$0\leqslant f(r,s)\leqslant C_4S^{\bar{q}},$$

这里常数 $\bar{q}<\frac{n}{2}(q-1)-1$；

$(L_6)$ 当 $(r,s)\in(R^+)^2$ 时，有

$$(\alpha+1)F(r,s)\leqslant Sf(r,s)$$

这里 $F(r,s)=\int_0^s f(r,\xi)\mathrm{d}\xi$，常数 $\alpha\geqslant\frac{n(1-C_3)+1}{nC_3-1}, n>\frac{1}{C_3}$；

$(L_7)$ 当 $P\in\bar{R}^+$ 时，有

$$\int_0^P\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho\geqslant 0$$

这里 $E(\rho)=A(\rho)+\rho\frac{\mathrm{d}A(\rho)}{\mathrm{d}\rho}$；

$(L_8)$ 当 $(r,s)\in(R^+)^2$ 时，有

$$f(r,s)\neq C_5S^{\frac{n(1-C_3)+1}{nC_3-1}}$$

$(L_9)$ $\limsup\limits_{\substack{r\to+\infty\\ s\to 0^+}}\{r^{n+\eta}f(r,s)\}<+\infty$

这里 $\eta$ 为正常数。

## 1 几个引理

引理 1 设 $u=u(r)$ 是方程(1)的径向解，其中 $r\in[R_1,R_2), 0\leqslant R_1<R_2\leqslant+\infty$，$A(P)\in C^1(\bar{R}^+)$，$f(r,s)\in C^{1,0}((R^+)^2)$，则对任意一个实数 $a$ 都有下面的恒等式成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^n\left[\int_0^P\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+F(r,u)+aA(P)\frac{uu'}{r}\right]\right\}$$

$$=r^{n-1}\left[n\int_0^P\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+nF(r,u)+rF_r(r,u)-auf(r,u)+(a+1-n)A(P)P^2\right]\quad(5)$$

其中 $P=|u'|=\left|\frac{du}{dr}\right|, E(\rho)=A(\rho)+\rho\frac{dA(\rho)}{d\rho}, F(r,u)=\int_0^u f(r,\xi)d\xi$。

证　由于 $u=u(r)$ 是方程(1)的径向解，因此，方程(1)可改写为

$$A'(P)u'\frac{dP}{dr}+A(P)u''+\frac{n-1}{r}A(P)u'+f(r,u)=0 \tag{6}$$

对(5)式左端求导，然后将(6)式代入，进行适当整理就可推出(5)式的右端，即

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\left\{r^n\left[\int_0^P\rho E(\rho)d\rho+F(r,u)+aA(P)\frac{uu'}{r}\right]\right\}\\
&=nr^{n-1}\left[\int_0^P\rho E(\rho)d\rho+F(r,u)+aA(P)\frac{uu'}{r}\right]+r^n\left[PE(P)\frac{dP}{dr}\right.\\
&\quad\left.+F_r(r,u)+f(r,u)u'+aA'(P)\frac{dP}{dr}\frac{uu'}{r}+aA(P)\frac{u'^2+uu''}{r}-aA(P)\frac{uu'}{r^2}\right]\\
&=r^{n-1}\left\{n\int_0^P\rho E(\rho)d\rho+nF(r,u)+rF_r(r,u)+au\left[A'(P)u'\frac{dP}{dr}+A(P)u''\right.\right.\\
&\quad\left.+\frac{n-1}{r}A(P)u'\right]+ru'\left[A'(P)u'\frac{dP}{dr}+A(P)u''+f(r,u)\right]+aA(P)u'^2\Big\}\\
&=r^{n-1}\left[n\int_0^P\rho E(\rho)d\rho+nF(r,u)+rF_r(r,u)-auf(r,u)+(a+1-n)A(P)P^2\right]
\end{aligned}$$

证毕

**引理 2**　若满足条件$(L_1)(L_2)$，$u(r)>0$ 是方程(1)的径向解，且 $\lim\limits_{r\to0^+}\sup u(r)=+\infty$，则

$$\lim_{r\to0^+}u(r)=+\infty \tag{7}$$

证　假定 $\lim\limits_{r\to0^+}\inf u(r)<+\infty$，根据题设 $\lim\limits_{r\to0^+}\sup u(r)=+\infty$，则一定存在一个序列 $\{r_i\}, r_i\to0^+\ (i\to\infty)$，使

$$u'(r_i)=0,\qquad u''(r_i)\geqslant0$$

由条件$(L_2)$知　$f(r_i,u(r_i))\geqslant C_2u^q(r_i)>0$

因此
$$\begin{aligned}
&A'(p(r_i))u'(r_i)\frac{dP(ri)}{dr}+A(p(r_i))u''(r_i)\\
&+\frac{n-1}{r}A(p(r_i))u'(r_i)+f(r_i,u(r_i))\\
&=A(p(r_i)u''(r_i)+f(r_i,u(r_i))>0
\end{aligned}$$

这与(6)式矛盾，故 $\lim\limits_{r\to0^+}\inf u(r)=+\infty$，所以

$$\lim_{r\to0^+}u(r)=+\infty$$

证毕

**引理 3**　若满足条件$(L_1)(L_2)$，$u(r)>0$ 是方程(1)的径向解，且 $\lim\limits_{r\to0^+}u(r)=+\infty$，则存在 $r_0>0$，当 $0<r<r_0$ 时，有

$$u(r)\leqslant\frac{C_0}{r^{2/(q-1)}} \tag{8}$$

这里 $C_6$ 为正常数。

证(反证法) 对方程(1)径向解 $u=u(r)$ 而言，可把方程(1)改写成

$$(r^{n-1}Au')'+r^{n-1}f(r,u)=0 \tag{9}$$

由题设 $\lim\limits_{r\to 0^+}u(r)=+\infty$ 及条件 $(L_2)$ 可知，一定存在 $r_0(0<r_0\leqslant b)$，当 $0<r<r_0$ 时，有 $f(r,u)>0$. 因此，由(9)式得

$$(r^{n-1}Au')'<0 \qquad (0<r<r_0) \tag{10}$$

即 $r^{n-1}Au'$ 在 $(0,r_0)$ 内严格单调递减。

我们断定存在点列 $\{r_k\}$, $r_k\to 0^+$ $(k\to\infty)$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}u'(r_k)<0$. 若不然，存在 $\delta_0>0$，当 $r\in(0,\delta_0]$ 时，有 $u'(r)\geqslant 0$，再由题设 $\lim\limits_{r\to 0^+}u(r)=+\infty$，可推出在 $(0,\delta_0]$ 上有 $u(r)\geqslant+\infty$. 这与 $u(r)$ 在 $(0,\delta_0]$ 上有定义矛盾，故我们的断言成立，因此，由(10)式及我们的上述断言，可推出

$$u'(r)<0, \qquad 0<r<r_0 \tag{11}$$

从 $\bar{r}$ 到 $r(0<\bar{r}<r<r_0)$ 积分(9)式，得

$$r^{n-1}Au'(r)=\bar{r}^{n-1}Au'(\bar{r})-\int_{\bar{r}}^{r}S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s$$

所以

$$r^{n-1}Au'(r)<-\int_{\bar{r}}^{r}S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s$$

上式令 $\bar{r}\to 0$，得

$$r^{n-1}Au'(r)\leqslant-\int_{0}^{r}S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant-C_2\int_{0}^{r}S^{n-1}u^q(s)\mathrm{d}s \qquad (\text{这里用到条件}(L_2))$$

由于(11)式 $u(r)$ 在 $(0,r_0)$ 内严格单调递减，因此可使上式变为

$$r^{n-1}Au'(r)\leqslant-C_2u^q(r)\int_{0}^{r}S^{n-1}\mathrm{d}s=-\frac{C_2}{n}r^nu^q(r)$$

亦即

$$Au'(r)\leqslant-\frac{C_2}{n}ru^q(r) \tag{12}$$

再 上条件 $(L_1)$ 及(11)式知 $C_1u'(r)\leqslant Au'(r)$，从(12)式推出

$$\frac{u'(r)}{u^q(r)}\leqslant-\frac{C_2}{nC_1}r$$

从 0 到 $r(0<r<r_0)$ 积分上式，不难得到

$$u(r)\leqslant\frac{C_6}{r^{2/(q-1)}} \qquad (0<r<r_0)$$

这里 $C_6$ 为某个正常数。 证毕.

**引理 4** 若满足引理 3 条件，则存在一个序列 $\{r_k\}$，$r_k\to 0^+$ $(k\to\infty)$，当 $k$ 充分大时，有

$$|u'(r_k)|\leqslant\frac{C_7}{r_k^{1+2/(q-1)}} \tag{13}$$

这里 $C_7$ 为某一个正常数

**证** 我们断言

$$\lim_{r\to 0^+}\sup\{r^{1+2/(q-1)}u'(r)\}>-\infty \tag{14}$$

若不然，有

$$\lim_{r\to 0^+}\sup\{r^{1+2/(q-1)}u'(r)\}=-\infty$$

因此

$$\lim_{r\to 0^+}\{r^{1+2/(q-1)}u'(r)\}=-\infty$$

于是，$\forall M>0$，$\exists r_M>0$，当 $0<r<r_M$ 时，有

$$r^{1+2/(q-1)}u'(r)<-M$$

对上式两端同除以 $r^{1+2/(q-1)}$ 后，再从 $r$ 到 $r_M$ 积分，得

$$u(r_M)-u(r)=\int_r^{r_M}u'(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_r^{r_M}(-MS^{-(1+2/(q-1))})\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}M(q-1)(r_M^{-2/(q-1)}-r^{-2/(q-1)})$$

在上式中令 $r=\frac{1}{2}r_M=r_m$，得

$$u(r_M)-u(r_m)\leqslant\frac{1}{2}M(q-1)(2^{-2/(q-1)}-1)r_m^{-2/(q-1)}$$

因此

$$u(r_m)>C_8Mr_m^{-2/(q-1)} \tag{15}$$

这里 $C_8=\frac{1}{2}(q-1)(1-2^{-2/(q-1)})$，由 $M$ 的任意性，总可以选取充分大 $M$，使(15) 式与引理 3 结论(8) 相矛盾，故我们断言(14) 式成立，不妨设

$$\lim_{r\to 0^+}\sup\{r^{1+2/(q-1)}u'(r)\}=C_9$$

这里 $C_9$ 为非正常数，于是，存在 $r_k\to 0^+$ $(k\to\infty)$，
使

$$\lim_{k\to\infty}\{r_k^{1+2/(q-1)}u'(r_k)\}=C_9$$

故对 $\varepsilon_0>0$，$\exists k_0>0$，当 $k>k_0$ 时，有

$$|r_k^{1+2/(q-1)}u'(r_k)-C_9|<\varepsilon_0$$

由此推得引理 4 结论成立。 证毕

## 2 结果及证明

首先，考虑定解问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(A(|Du|)Du)+f(|x|,u)=0,x\in B_R\backslash\{0\} & (16)\\ u(r)>0,r\in[0,R) & (17)\end{cases}$$

$$u(r)|_{r=R}=0 \tag{18}$$

这里 $B_R(0)$ 是以原点为心以 $R$ 为半径的 $n$ 维开球，正整数 $n>2$。

我们有如下的

**定理 1** 若满足条件 $(L_1)$、$(L_3)\sim(L_8)$（条件中 $r$ 变化范围 $R^+$ 改为 $[0,R]$），则定解问题 (16) ~ (18) 没有有界的径向解。

**证** （反证）假定 $u(r)$ 是定解问题 (16) ~ (18) 的有界径向解，不妨设 $u(r)\leqslant M_0$（$M_0$ 为正常数）

首先注意到：由分部积分据条件 $(L_3)$ 及 $(L_7)$ 可推得

$$\int_0^P \rho E(\rho)\mathrm{d}\rho\leqslant(1-C_3)A(P)P^2 \tag{19}$$

由条件 $(L_4)$ 及 $(L_6)$ 可知

$$F_r(r,u)\leqslant 0 \tag{20}$$

因为 $u$ 有界，所以结合条件 $(L_5)$，有

$$\lim_{r\to0^+}(r^nF(r,u))=0 \tag{21}$$

由 (20) 式及条件 $(L_5)$ 有

$$|r^{n-1}Au'(r)|=\left|-\int_0^r S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant C_1M_0^{\tau}\frac{r^n}{n}\to 0\qquad(r\to0^+)$$

所以 $\lim\limits_{r\to0^+}(r^{n-1}Au')=0$

因此 $\lim\limits_{r\to0^+}(aur^{n-1}Au')=0$ (22)

我们断言 $\lim\limits_{r\to0^+}\inf(r^nu'^2)=0$

若不然，存在一个常数 $C_{10}>0$，使 $r^nu'^2(r)\geqslant C_{10}$，$r\in(0,\varepsilon')$（$\varepsilon'$ 为正常数），对 $0<r<\varepsilon'$，注意到 (22) 式，有

$$|u(r)-u(0)|=\int_0^r|u'(s)|\mathrm{d}s\geqslant C_{10}^{\frac{1}{2}}\int_0^r\frac{\mathrm{d}s}{s^{\frac{n}{2}}}=+\infty$$

因此 $|u(r)|\geqslant+\infty$，$r\in(0,\varepsilon')$，这与假定相矛盾，故我们的断言成立，于是，存在点到 $\{r_k\}$，$r_k\to0^+$ $(k\to\infty)$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}r_k^nu'^2(r_k)=0$。

所以，结合 (19) 式及条件 $(L_1)$，有

$$r_k^n\int_0^{P(r_k)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho\leqslant r_k^n(1-C_3)C_1u'^2(r_k)\to0\qquad(k\to\infty)$$

根据上式及条件 $(L_7)$，得

$$\lim_{r\to\infty}r_k^n\int_0^{P(r_k)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho=0 \tag{23}$$

现在，我们从 $r_k$ 到 $R$ 积分(16)式，令 $a=\frac{n}{\alpha+1}$，再注意到(18)式，得

$$R^n\int_0^{P(R)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho-r_k^n\Big[\int_0^{P(r_k)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+F(r_k,u(r_k))+aAu'(r_k)u(r_k)/r_k\Big]$$
$$=\int_{r_k}^R S^{n-1}\Big[n\int_0^{P(S)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+nF(s,u(s))+SF'_s(s,u(s))$$
$$-auf(s,u(s))+(a+1-n)A(p(s))p^2(s)\Big]\mathrm{d}s \tag{24}$$

令 $r_k\to 0(k\to\infty)$，根据(21)、(22)、(23)式，结合(19)式，则(24)式变为

$$R^n\int_0^{P(R)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho\leqslant\int_0^R S^{n-1}\Big[n\cdot\frac{(\alpha+1)F(s,u)-uf(s,u)}{\alpha+1}+SF'_s(s,u)$$
$$+\Big(\frac{n}{\alpha+1}+1-nC_3\Big)A(P(s))P^2(s)\Big]\mathrm{d}s \tag{25}$$

根据(20)式及条件$(L_1)$、$(L_6)$可知(25)式右端被积函数非正，因此右端积分非正、又由条件$(L_7)$可知(25)式左端非负、故推得

$$\int_0^R S^{n-1}\Big[n\cdot\frac{(\alpha+1)F(s,u)-uf(s,u)}{\alpha+1}+SF'_s(s,u)$$
$$+\Big(\frac{n}{\alpha+1}+1-nC_3\Big)A(P(s))P^2(s)\Big]\mathrm{d}s\equiv 0$$

已知上式中被积函数非正但还是连续的，因此可推得

$$F'_r(r,u)\equiv 0,(\alpha+1)F(r,u)\equiv uf(r,u),$$
$$\alpha\equiv\frac{n(1-C_3)+1}{nC_3-1}$$

从而得出 $F(r,u)=F(u),f(r,u)=f(u)$

因此，由 $(\alpha+1)F(u)=uf(u)$，再注意到 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$，经简单计算得

$$f(r,u)=f(u)=C_{11}u^\alpha\qquad(C_{11}>0\text{ 为常数})$$

这与题设$(L_8)$矛盾，故定解问题(16)～(18)没有有界的径向解。 证毕

其次，考虑定解问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(A(|Du|)Du)+f(|x|,u)=0,x\in B_R(0)\backslash\{0\} & (26)\\ u(r)>0,r\in(0,R) & (27)\\ \lim\limits_{r\to0^+}u(r)=+\infty & (28)\\ u(r)|_{r=R}=0 & (29)\end{cases}$$

我们给出下面的

**定理2** 若满足条件$(L_1)$～$(L_8)$（条件中 $r$ 变化范围 $R^+$ 改为$(0,R]$），则定解问题(26)

～(29) 不存在径向解。

证 (反证) 由定理 1 可知定解问题(26) ～ (29) 没有有界的径向解,假定 $u(r)$ 是定解问题(26) ～ (29) 的无界径向解,由引理 2 可知,必有 $\lim\limits_{r\to 0^+} u(r) = +\infty$,因此,应用引理 4 及 $\int_0^P \rho E(\rho)\mathrm{d}\rho \leqslant (1-C_3)C_1 u'^2$,得

$$r_k^n \int_0^{P(r_k)} \rho E(\rho)\mathrm{d}\rho \leqslant C_{12} r_k^{n-2[1+2/(q-1)]} \to 0 \qquad (r_k \to 0^+),$$

这里 $C_{12} = (1-C_3)C_1C_9^2$,$r_k$ 为引理 4 中的序列。再根据条件($L_7$),从上式得

$$\lim_{r\to 0^+} r_k^n \int_0^{P(r_k)} \rho E(\rho)\mathrm{d}\rho = 0 \tag{30}$$

由条件($L_5$) 及引理 3,得

$$r_k^n F(r_k, u(r_k)) \leqslant \frac{C_4}{1+\bar{q}} r_k^n u^{1+\bar{q}}(r_k) \leqslant \frac{C_4 C_6^{1+\bar{q}}}{1+\bar{q}} r_k^{n-2(1+\bar{q})/(q-1)} \to 0 \qquad (r_k \to 0^+)。$$

所以

$$\lim_{r\to 0^+} r_k^n F(r_k, u(r_k)) = 0。\tag{31}$$

由条件($L_1$) 及引理 3,引理 4,有

$$|\alpha A u'(r_k) u(r_k) r_k^{n-1}| \leqslant |\alpha| C_1 C_6 C_7 r_k^{n-1-\frac{2}{q-1}-\left(1+\frac{2}{q-1}\right)} \to 0 \qquad (r_k \to 0^+)$$

所以

$$\lim_{r\to 0^+} (\alpha A u'(r_k) u(r_k) r_k^{n-1}) = 0 \tag{32}$$

从 $r_k$ 到 $R$ 积分(5) 式,令 $r_k \to 0^+$,结合(30)、(31)、(32)、(19) 诸式,得

$$R^n \int_0^{P(R)} \rho E(\rho)\mathrm{d}\rho \leqslant \int_0^R S^{n-1}\Big[n \cdot \frac{(\alpha+1)F(s,u) - uf(s,u)}{\alpha+1} \\ SF'_S(s,u) + \left(\frac{n}{\alpha+1} + 1 - nC_3\right) A(p(s))P^2(s)\Big]\mathrm{d}s \tag{33}$$

根据(20) 式和条件($L_1$)、($L_6$),可知(33) 式右端被积函数非正,从而积分非正,而由条件($L_7$) 可知(33) 式左端非负,故

$$\int_0^R S^{n-1}\Big[n \cdot \frac{(\alpha+1)F(s,u) - uf(s,u)}{\alpha+1} + SF'_S(s,u) \\ + \left(\frac{n}{\alpha+1} + 1 - nC_3\right) A(p(s))P^2(s)\Big]\mathrm{d}s \equiv 0$$

已知上式被积函数非正但还是连续的,不难推得

$$F'_r(r,u) \equiv 0,\ (\alpha+1)F(r,u) \equiv uf(r,u),\ \alpha \equiv \frac{n(1-C_3)+1}{nC_3-1}$$

从而得出 $$F(r,u) = F(u),\ f(r,u) = f(u)$$

由 $(\alpha+1)F(u)=uf(u)$，再注意到 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$，经过简单计算得

$$f(r,u)=f(u)=C_{13}u^{\alpha}\qquad (C_{13}>0\text{ 为常数})$$

这与题设$(L_8)$矛盾，故定解问题(26) ~ (29)不存在径向解。 证毕。

最后，我们给出如下的

**定理 3** 若满足条件$(L_1)$ ~ $(L_9)$，则定解问题(1) ~ (4)不存在径向解。

**证** （反证法）假定 $u(r)$ 是定解问题(1) ~ (4)的径向解，由定理 2 的证明过程可知

$$\lim_{r_k\to0^+} r_k^n\left[\int_0^{P(r_k)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+F(r_k,u(r_k))+aA(p(r_k))u(r_k)\frac{u'r_k}{r_k}\right]=0 \tag{34}$$

从 $r_k$ 到 $r$ 积分(5)式，得

$$\begin{aligned}
&r^n\left[\int_0^{P(r)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+F(r,u(r)+aA(p(r))u(r)\frac{u'(r)}{r}\right]\\
&-r_k^n\left[\int_0^{P(r_k)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+F(r_k,u(r_k))+aA(p(r_k))u(r_k)\frac{u'r_k}{r_k}\right]\\
=&\int_{r_k}^{r}S^{n-1}\Big[n\int_0^{P(S)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+nF(s,u(s)+SF'_s(s,u(s))\\
&-au(s)f(s,u(s))+(a+1-n)A(P(s))P^2(s)\Big]\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

令 $r_k\to0$，结合(34)式，上式变为

$$\begin{aligned}
&r^n\left[\int_0^{P(r)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+F(r,u(r)+aA(p(r))u(r)\frac{u'(r)}{r}\right]\\
=&\int_0^{r}S^{n-1}\Big[n\int_0^{P(S)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho+nF(s,u(s)+SF'_s(s,u(s))\\
&-au(s)f(s,u(s))+(a+1-n)A(P(s))P^2(s)\Big]\mathrm{d}s\\
\leqslant&\int_0^{r}S^{n-1}\big[nF(s,u(s))-au(s)f(s,u(s))+sF'_s(s,u(s))\\
&+(a-1-nC_3)A(p(s))u'^2(s)\big]\mathrm{d}s\qquad (\text{这里用到(19)式})\\
\leqslant&0\qquad\left\{\text{这里用到(20)式和条件}(L_1)、(L_8), a=\frac{n}{\alpha+1}\right\}
\end{aligned}\tag{35}$$

由条件$(L_9)$：

$$\limsup_{\substack{r\to+\infty\\ s\to0^+}}\{r^{n+\gamma}f(r,s)\}<+\infty$$

则存在常数 $M_1>0, r_1>0, S_1>0$，当 $r>r_1, 0<S<S_1$ 时，有

$$r^{n+\gamma}f(r,s)\leqslant M_1$$

由 $\lim\limits_{r\to+\infty}u(r)=0$，对上述 $S_1$，存在 $r_2>0$，当 $r>r_2$ 时，有 $0<u(r)<S_1$。

取 $r_3=\max\{r_1,r_2\}$，于是，当 $r>r_3$ 时，有

$$r^{n+\eta}f(r,u)\leqslant M_1$$

从而

$$r^nF(r,u)=r^n\int_0^u f(r,s)\mathrm{d}s=\frac{\int_0^u r^{n+\eta}f(r,s)\mathrm{d}s}{r^{\eta}}\leqslant\frac{M_1S_1}{r^{\eta}}$$

又由条件($L_5$)可知 $F(r,u)$ 非负，因此从上式得

$$\lim_{r\to+\infty}(r^nF(r,u))=0 \tag{36}$$

由 (20) 式，得

$$(r^{n-1}Au')'=-r^{n-1}f(r,u)\leqslant 0$$

即 $r^{n-1}Au'$ 单调递减，因为

$$(r^{n-1}Au')'=-r^{n-1}f(r,u)=(-\int_0^r S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s)'$$

所以 $$r^{n-1}Au'=-\int_0^r S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s+C_0\qquad(C_0\text{ 为常数})$$

又由于

$$\int_0^r S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s=\left(\int_0^{r_0}+\int_{r_0}^{r_3}+\int_{r_3}^{r}\right)S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_1\int_0^{r_0}S^{n-1}u^{\bar q}(s)\mathrm{d}s+\int_0^{r_3}S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s+\int_{r_3}^{r}\frac{S^{n+\eta}f(s,u(s))}{S^{1+\eta}}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_1C_6\int_0^{r_0}S^{n-1-2\bar q/(q-1)}\mathrm{d}s+\int_{r_0}^{r_3}S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s+\int_{r_3}^{r}\frac{\mathrm{d}s}{S^{1+\eta}}$$

$$<\frac{C_1C_6r^{n-2\bar q/(q-1)}}{n-2\bar q/(q-1)}+\int_{r_0}^{r_3}S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s+\frac{M_1}{\eta r_3^{\eta}}$$

因此

$$r^{n-1}Au'>-\frac{C_1C_6r^{n-2\bar q/(q-1)}}{n-2\bar q/(q-1)}+\int_{r_0}^{r_3}S^{n-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s-\frac{M_1}{\eta r_3^{\eta}}+C_0=\text{常数}$$

即 $r^{n-1}Au'$ 有下界，故

$$\lim_{r\to+\infty}(r^{n-1}Au')\text{ 存在}$$

结合 $\lim\limits_{r\to+\infty}u(r)=0$，得

$$\lim_{r\to0^+}(aA(p(r))u(r)u'(r)r^{n-1})=0 \tag{37}$$

由 $\lim\limits_{r\to0^+}(r^{n-1}Au')$ 存在及条件($L_1$)可推出 $|r^{n-1}u'(r)|$ 有界（当 $r$ 充分大），因此

$$r^n\int_0^{p(r)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho\leqslant r^n(1-C_3)C_1u'^2(r)$$

$$=(1-C_3)C_1r^{-(n-2)}(r^{n-1}u'(r))^2\to 0 \quad (r\to+\infty)$$

再由条件$(L_7)$，从上式得

$$\lim_{r\to+\infty} r^n\int_0^{p(r)}\rho E(\rho)\mathrm{d}\rho=0 \tag{38}$$

令 $r\to+\infty$，结合(36)、(37)、(38)三式，从(35)式得

$$\int_0^{+\infty}S^{n-1}[nF(s,u(s))-au(s)f(s,u(s))+sF'_r(s,u(s))$$
$$+(a+1-C_3n)A(p(s))u'^2(s)]\mathrm{d}s=0 \tag{39}$$

根据(20)式及条件$(L_1)(L_6)$，取 $a=\frac{n}{\alpha+1}$，可知(39)式的被积函数非正且连续，故推得：

$$F_r(r,u)\equiv 0,(\alpha+1)F(r,u)\equiv uf(r,u)$$

$$\alpha\equiv\frac{n(1-C_3)+1}{nC_3-1}$$

从而推出

$$F(r,u)=F(u),f(r,u)=f(u)。$$

由$(\alpha+1)F(u)=uf(u)$，再注意到 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$，经简单计算得

$$f(r,u)=f(u)=C_{14}u^{\alpha}\quad(C_{14}>0\text{ 为常数})$$

这与题设$(L_8)$矛盾，故定解问题(1)～(4)不存在径向解。　　证毕

## 3 例　　子

**例1**　考虑定解问题

$$\begin{cases}\triangle u+\dfrac{u^l}{|x|^\beta+h^2}=0,x\in R^n\backslash\{0\}\\ u(r)>0,r\in R^+\\ \lim\limits_{r\to0^+}u(r)=+\infty\\ \lim\limits_{r\to+\infty}u(r)=0\end{cases}$$

这里 $n>2+\frac{4}{l-1}$，$\beta\geqslant n+\eta$，$\eta$，$h$ 均为正常数。

注意到 $A\equiv 1$，取 $C_3=\frac{1}{2}$，$q=\bar{q}=l$，$\alpha<l$，易验证满足定理3中的所有条件，故此定解问题不存在径向解。

**例2**　考虑定解问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}\left(\left(e^{-|Du|}+\dfrac{1}{2}\right)Du\right)+\dfrac{u^l}{|x|^\beta+h^2}=0,x\in R^n\backslash\{0\}\\ u(r)>0,r\in R^+\\ \lim\limits_{r\to0^+}u(r)=+\infty\\ \lim\limits_{r\to+\infty}u(r)=0,\end{cases}$$

这里 $n > 2 + \frac{4}{l-1}$，$\beta \geqslant n + \eta$，$\eta$、$k$ 均为正常数。

只要注意到 $\frac{1}{2} \leqslant A(P) = e^{-P} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2}$，取 $C_3 = \frac{1}{2}$，$q = \bar{q} = l$，$\alpha < l$，易验证满足定理 3 中的所有条件，故此定解问题不存在径向解。

## 参 考 文 献


1 Ni, W. M, and Serrin, J. Nonexistence theorems for singular solutions of quasilinear partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math, 1986, 39(3): 379～399

2 Chang Chiuchun, (Taiwan. U. ) Correction to "on the asumptotic behavior of positive radial solutions of semi-linear elliptic equations in R"". Chinese Journal of Mathematics. 1994, 22(1): 95～97

3 刘玉仁，陈世明. 在圆环域内的非线性椭圆型方程的正径向对称解的存在性. 广州师院学报，1992，(2)：1～11

4 Zhao Zengqin (Qufu Normal U. ) Uniqueness and iterative method of positive radially symmetric solutions for singlar elliptic equations, Ann. of Diff. Equ. 1994, 10(2): 245～253


（编辑：王秀玲）

# NONEXISTENCE OF POSITIVE RADIAL SOLUTIONS FOR THE SINGULAR DIRICHLET PROBLEMS OF EQUATION $div(A(|Du|)Du)+f(|x|,u)=0$


*Guo Baichang*

(Jilin Teachers College, Jilin, 132011)

*Zhou Xianglong*

(Zhe Jiang Teachers University, Zhejiang, 321004)

*Ke Hounglu*

(Chongqing Jianzhu University)



**ABSTRACT** In this paper, we give sufficient conditions of nonexistences of positive radial solutions for the singular Dirichlet problems of the partial differential equation

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(|Du|)Du) + f(|x|, u) = 0, x \in R^n\setminus\{0\} \\ \qquad u(r) > 0, r \in R^+ \\ \lim\limits_{r \to 0^+} u(r) = +\infty \\ \lim\limits_{r \to +\infty} u(r) = 0 \end{cases}$$

and discuss nonexistences of positive radial solutions for two Dirichlet problems.


**KEY WORDS** radial solutions, singular, identity