

(3)

杆系结构

刚架

割线刚度

弧长法

非线性

27-31

刚架分析的割线刚度弧长法

王永跃

(河北建工学院)

吴德伦

(重庆建筑大学)

TU328.01

摘要 将割线刚度引入弧长法进行计算,以求解非线性有限元问题。这个方法的优点是可以不必计算各增量步引起的初始内抗力项,与原弧长法相比较计算量较小,程序也易于编制,可广泛用于求解非线性问题。

关键词 割线刚度, 增量算法, 弧长法, 非线性分析

中图法分类号 TU328.01

在非线性有限元分析中,无论是几何非线性或材料非线性问题都会遇到非线性代数方程组的求解问题。为了避免解大型非线性方程组所遇到的数学上的困难,常用增量荷载法将非线性问题线性化,例如 *Newton-Raphson* 法、拟牛顿法等。这些方法要完全追踪问题非线性行为的路径是困难的,除非增量的步长十分小,且迭代措施得当,否则容易偏离实际的路径,发生解的漂移,导致较大的误差。这种情况特别容易发生在稳定性问题的极值点或分支点附近。为了克服这一困难,最早由 *Wempner* 和 *Riks*^[1] 在荷载位移空间的迭代中引入了一个弧长的概念以控制解的漂移,后来由 *Crisfield* 和 *Ramn* 把这一方法应用到受压圆柱浅壳的非线性有限元分析中,得出了良好的非线性响应曲线,且成功地避免了增量法计算中过极值点时易产生的跃释或跳跃屈曲 (*Snaping*) 现象,这就为非线性问题的求解找到了一条新的途径,这种引入弧长控制的迭代方法,常称为弧长法^[2]。

在弧长法的增量迭代中,多数沿袭了 *Newton-Raphson* 或拟牛顿法的思想,采用了切线刚度进行迭代,例如 *Bergan* 提出的当前刚度参数法^[3],在每个增量步中都要由已经建立的应力状态确定内抗力(即广义的荷载调整),这在连续介质有限元分析中是可行的,但对于杆系结构而言,要直接由前一步的切线刚度和位移去确定这种内抗力,往往会得出不正确的结果,这就使得弧长法在杆系结构分析上遇到困难。事实上,在杆系结构的非线性分析中,宜在迭代过程中采用割线刚度,为此本文对切线刚度迭代的弧长法予以改进,扩展到割线刚度迭代的场合,并用以解刚架的非线性全程分析问题。

1 割线刚度弧长法

对于有限元法的平衡方程式可以写作

$$\{R(u)\} = \{F(u)\} - \lambda \{P_0\} \quad (1)$$

式中 $\{R_0(u)\}$ 为不平衡向量, $\{F(u)\}$ 表示内抗力, $\{P_0\}$ 为一设定的荷载向量, λ 代表荷载水平的参数, $\{u\}$ 为结构的位移向量。按照弧长法,把 λ 看作是一个独立的未知量,将一个含 n

收稿日期: 1995-07-10

王永跃,男,1960年生,讲师,河北建筑工程学院建工系(石家庄 075024)

个未知位移的代数方程组化成含 $(n + 1)$ 个未知量的代数方程组求解。补充的方程式即为弧长约束

$$\begin{aligned} & \{\Delta u\}_{i+1} \{\Delta u\}_{i-1} + b \Delta \lambda_{i+1} \{P_0\}^T \{P_0\} = \{\Delta u\}_i \{\Delta u\}_i^T + b \Delta \lambda_i^2 \{P_0\}^T \{P_0\} \\ & = \{\Delta u\}_i^T \{\Delta u\}_{i-1} + b \Delta \lambda_{i-1}^2 \{P_0\}^T \{P_0\} = \dots = \Delta l^2 \end{aligned} \quad (2)$$

式中的 $\{\Delta u\}_i$ 、 $\Delta \lambda_{i+1}$ 等代表一个增量步的第 $i + 1$ 次迭代得到的增量位移和相应的荷载增量参数。 b 是一个比例常数, Δl 为设定的弧长。结构分析中, 希望迭代过程中由增量位移起控制作用, 故可取 $b = 0$ [4]

如果在迭代过程中, 采用割线刚度 $K_s(u)$, 则(1)式中的内抗力应为

$$\{F(\Delta u)\}_i = [K_s(\Delta u)]_i \cdot \{\Delta u\}_i \quad (3)$$

不平衡力为

$$\{R(\Delta u)\}_i = \{F(\Delta u)\}_i - \Delta \lambda_{i+1} \{P_0\} \quad (4)$$

迭代的位移增量 $\{d\}_i$ 应为

$$\begin{aligned} \{d\}_i &= -[K_s(u)]_i^{-1} \{[-K_s(\Delta u)]_i \{\Delta u\}_i - \Delta \lambda_{i+1} \{P_0\}\} \\ &= -\{\Delta u\}_i - \Delta \lambda_{i+1} \{d\}_i \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{式中, } \{d\}_i = -[K_s(\Delta u)]_i^{-1} \{P_0\} \quad (6)$$

由此可得迭代中的位移增量与荷载参数为

$$\{\Delta u\}_{i+1} = \{\Delta u\}_i + \{d\}_i = \Delta \lambda_{i+1} \{d\}_i \quad (7)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_0 + \Delta \lambda_{i+1} \quad (8)$$

$$\{u\}_{i+1} = \{u\}_0 + \{\Delta u\}_{i+1} = \{u\}_0 + \Delta \lambda_{i+1} \{d\}_i \quad (9)$$

这里, $\{u\}_0$ 和 λ_0 为增量步开始时的初始位移和荷载水平。从(7)、(8)、(9)式可以看出, 为了使迭代能顺利进行, 只要知道荷载参数 $\Delta \lambda_{i+1}$ 和位移向量 $\{d\}_i$, 即可。为了使迭代过程中之 $\{d\}_i$ 不重复计算, 在(6)式中可取初始迭代时的割线刚度计算出来即可。

割线刚度的弧长控制迭代, 其几何意义见图 1 所示。

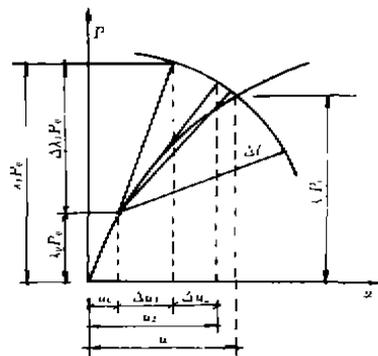


图 1 割线刚度弧长控制过程

2 割线刚度弧长法中的移位迭代技术

上面推导的割线刚度法中, 按照迭代计算的(7)、(8)、(9)式, 位移和荷载空间的计算起点是不动的, 为了计算方便, 我们把计算起点进行移位, 使得每一个增量步的起点作为计算原点, 这样,

$\{u\}_0$ 为前一次加载迭代结束时的总位移;

$\{f(u)\}_0$ 为前一次加载迭代结束时的总内抗力;

如果前一轮迭代完全收敛, 其总荷载向量参数为 λ_0 , 则应有平衡条件

$$\{f(u)\}_0 = \lambda_0 \{P_0\} \quad (10)$$

对任一增量步, 迭代仍由 $i = 0$ 开始向前, 有

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda_i \tag{11}$$

$$\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \{d\}_i \tag{12}$$

$$\{d\}_i = -\{u\}_i + \lambda_{i+1} \{d\}_i \tag{13}$$

$$\{d\}_i = -[K_s(u)]^{-1} \{P_0\} \tag{14}$$

这里, 计算向量 $\{d\}_i$ 时要用到迭代开始时的割线刚度矩阵。将(13)式与(12)式合并可得

$$\{u\}_{i+1} = \lambda_{i+1} \{d\}_i \tag{15}$$

这里, 如在弧长控制中令 $b = 0$,

由(15)式可得

$$\lambda_{i+1} = \Delta l_i / \sqrt{\{d\}_i^T \{d\}_i} \tag{16}$$

为了使弧长能自动生成, 在第一次迭代时($i = 0$)由(12)、(13)式知 $\{u\}_1 = \lambda_1 \{d\}_0$, 这样只须约定 λ_1 即可得到:

$$\Delta l = \lambda_1 \sqrt{\{d\}_0^T \{d\}_0} \tag{17}$$

以后在第 j 轮增量步中, 弧长可以参考前一轮的来估计, 即取

$$\Delta l_j = \Delta l_{j-1} \sqrt{I_{j-1}/I_j} \tag{18}$$

式中, I_j 为估计的迭代次数, I_{j-1} 为上一轮迭代的次数。

位移迭代的几何意义见图 2 所示。

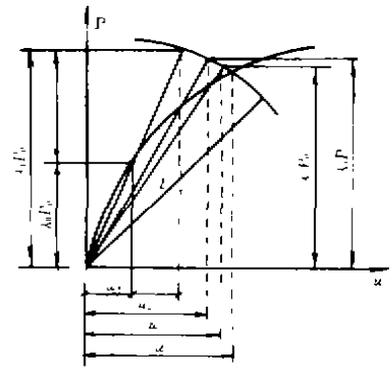


图 2 位移迭代几何意义

3 割线刚度弧长迭代的特点

从以上割线刚度迭代的公式中可以看出:

- 1) 在求解的过程中, 不需要计算结构的内抗力, 从而可以减少计算工作量;
- 2) 确定荷载参数十分容易, 不需像弧长法那样去求解二次方程和判定根的正确性, 使得程序更为简便;
- 3) 在迭代过程中, 虽然要重新计算割线刚度, 但不再计算由内抗力引起的增量位移, 可以直接得出总的增量位移或总位移;
- 4) 迭代次数少, 一般 3-7 轮即可收敛; 总的计算时间比弧长法为少。

4 计算实例

为了检验本文提出割线刚度弧长迭代法的可行性, 由本文第一作者编制了刚架非线性分析的弧长法计算程序, 下面是一些代表性的实例, 为了比较, 各例都取自国外文献中用弧长法计算的结果。

例 1 图 3 所示一典型的二杆桁架结构^[5], 二杆的轴向单位刚度为 k , 结点 c 所受荷载为 R , 若在加载过程中两杆的刚度 EA 保持不变, 则任意加载 R 与相应的垂直位移间的关系为

$$\frac{R}{2kL} = \left| -1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\Delta/L)\sin\alpha + (\Delta/L)^2}} \right| (\sin\alpha - \Delta/L)$$

取 $\alpha = 15^\circ$, 用割线弧长法求得的位移曲线如图 4 所示, 从解曲线可以看出, 当荷载单调增加

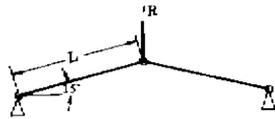


图 3 桁架几何形状及受力情况

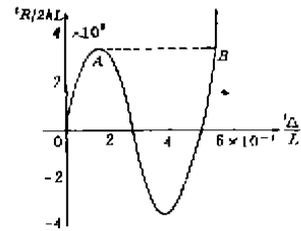


图 4 荷载-位移曲线, Δ 为中点的竖向位移

时, 到图中 A 点处可能发生两种情况, 一是沿图中的实线, 一是突然从 A 跃到 B 发生所谓跳跃屈曲现象, 类似的问题, 如扁壳, 浅柱壳的屈曲也会发生这样的跳跃屈曲现象。

例 2 图 5 所示的门式刚架, 其横梁和立柱皆为 W12 × 36 制成, 试验时采用四点按比例加载, 跨中挠度随荷载的变化关系如图 6 所示, 图中表示出了实验结果, 小变形分析结果和大变形分析结果^[4]以及本文所用的割线刚度法计算结果。

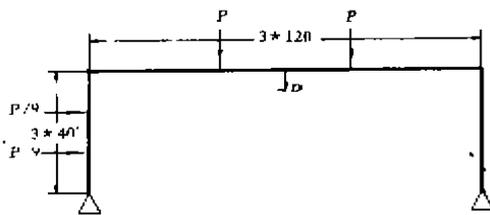


图 5 门式刚架

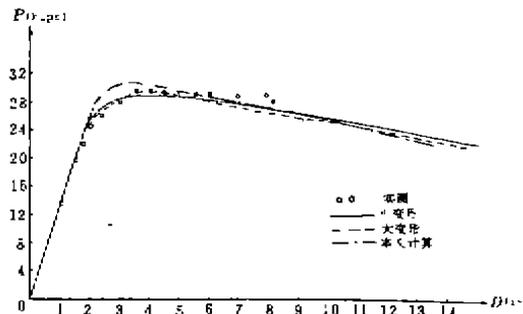


图 6 框架中点挠度曲线

例 3 图 7 所示的一四层刚架是 Kassimli (1983)^[6] 用以检验刚架分析的小变形大转动理论时的例题, 他所用的横向荷载参数为 $r = 0.1, 0.24, 0.5$, 图 8 是当 $r = 0.5$ 时所得的顶层跨中挠度的几个结果比较。

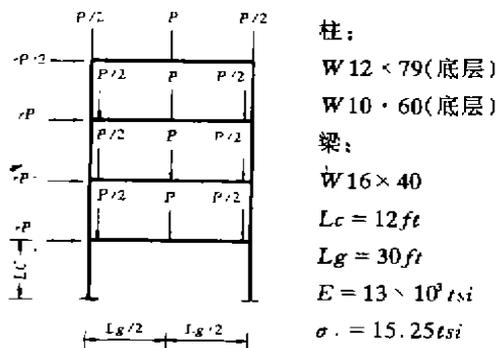


图 7 四层刚架及几何参数

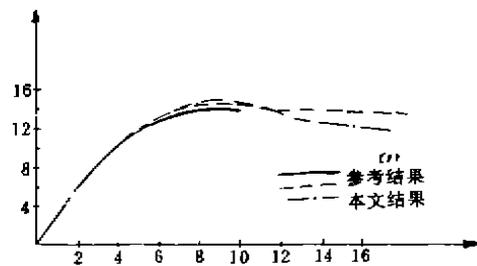


图 8 顶层跨中挠度曲线

从以上几个计算实例可以看出, 采用割线刚度弧长法可以较好地解决杆系结构的非线性分析问题。计算表明, 如何追踪结构非线性行为的极值点位置, 还有待进一步研究。

参 考 文 献

- 1 Wempner, G. A. Discrete Approximations Related to Non-Linear Theory of Solids, *Int. J. Solid Structures*, 1971, 7: 1581 - 1599
- 2 Ieussotte, J. P., et al, An effective Automatic Incremental - Iterative Method for Static Nonlinear Structural Analysis, *Comput & (and) Struct* 1988 30: 125 - 135
- 3 Crisfield, M. A. Arc-length Method Including Line Searches and Acceleration, *Int. J. Num. Math. Engng.* 1982, 7: 1269 - 1289
- 4 Kam, T. Y., Large Deflection Analysis of Inelastic Plane Frames, *J. of struct. Engng.* 114, 1, 1988: 184 - 198
- 5 Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice - Hall Englewood Cliffs, NJ, 1982
- 6 Kassimali, A., Large Deformation Analysis of Elastic - Plastic Frame, *J. Struct. Engng.* ASCE, 109(8): 1869 - 1886.
- 7 李毅、赵超、刚度弧长法, 第二届全国计算力学会议论文集。

(编辑: 刘家凯)

THE ARC - LENGTH METHOD OF SECANT RIGIDITY IN FRAME ANALYSIS

Wang Yongyue

(Hebei Institute of Architectural Engineering)

Wu Delun

(Chongqing Jianzhu University)

ABSTRACT The secant rigidity is used for the arc-length method to solve the nonlinear finite elements problems. The advantage of this method is unnecessary of calculating the initial resistance term caused by the incremental step. The computational work is less and the programing is easier as compared with initial arc-length method. This method can be widely used to solve nonlinear problems.

KEY WORDS Secant rigidity, computational method of increment, arc-length method, nonlinear analysis.