

外伸构件在双轴力作用下的稳定性计算

⑧
56-6077

陈进 胡学斌
(重庆建筑大学机电工程学院 630045)

TH213.303

摘要 讨论了外伸构件在端部和附着支承点上同时有轴向力作用时的稳定性计算问题。推导出了分别以简支段和外伸段为实际几何长度时的等效计算长度系数,并提供了实用可行的数据图表。

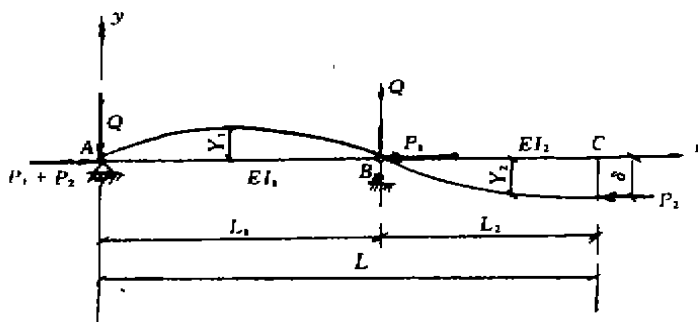
关键词 稳定性计算, 外伸构件, 轴向力, 等效计算长度系数

中图法分类号 TH213.3 起重机, 塔式起重机,

塔式起重机的单吊点吊臂、简易式塔机常用的回转塔帽及类似构件,其力学模型均可视为在端部和附着支承点上同时有轴力作用的外伸构件。现行《塔式起重机设计规范》(GB/T 13752-92)没有给出此类受力构件的等效计算长度系数,因而难以按《规范》规定的双向或单向压弯构件的稳定性计算公式进行整体稳定性验算。本文从求解屈曲微分方程入手,讨论了外伸构件在双轴力作用下的稳定性问题,给出了分别以简支段和外伸段作为实际几何长度时的等效计算长度系数。

1 屈曲微分方程的建立及求解

附图所示为双轴力作用下的外伸构件



附图 双轴力作用下的外伸构件

在临界状态下,构件由原来的直线平衡形式转变为横向弯曲的平衡形式。此时支承点将产生侧向支承反力 Q 。

对 B 点取矩:

$$\sum M_B = P_2 \delta - Q l_1 = 0 \quad (1)$$

收稿日期:1996-01-09

陈进,男,1956年生,副教授

由此得到侧向支承反力为:

$$Q = \frac{P_2 \delta}{l_1} \quad (2)$$

下面分别建立 AB 段和 BC 段的屈曲微分方程:

$$AB \text{ 段: } EI_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -(P_1 + P_2)y_1 - \frac{P_2 \delta}{l_1} x \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (3)$$

$$BC \text{ 段: } EI_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -P_2(\delta + y_2) \quad l_1 \leq x \leq l \quad (4)$$

$$\text{整理并令: } k_1^2 = \frac{P_1 + P_2}{EI_1}, \quad k_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}, \quad k_3^2 = \frac{P_2}{EI_1} \quad (5)$$

则得到如下的微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dx^2} + k_1^2 y_1 = -k_3^2 \frac{\delta}{l_1} x & 0 \leq x \leq l_1 \\ \frac{d^2 y_2}{dx^2} + k_2^2 y_2 = -k_3^2 \delta & l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (6)$$

此微分方程组的通解为:

$$\begin{cases} y_1 = A \sin(k_1 x) + B \cos(k_1 x) - \frac{k_3^2 \delta}{k_1^2 l_1} x & 0 \leq x \leq l_1 \\ y_2 = C \sin(k_2 x) + D \cos(k_2 x) - \delta & l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (7)$$

其中 A、B、C 和 D 为待定系数。

由边界条件:

$$\begin{cases} (y_1)_{x=0} = 0, & (y_1)_{x=l_1} = 0 \\ (y_2)_{x=l_1} = 0, & (y_2)_{x=l} = -\delta \end{cases} \quad (8)$$

可得四个积分常数为:

$$\begin{cases} A = \frac{k_3^2 \delta}{k_1^2 \sin(k_1 l_1)}, & B = 0 \\ C = -\frac{\delta \cos(k_2 l)}{\cos(k_2 l_1) \sin(k_2 l) - \cos(k_2 l) \sin(k_2 l_1)} \\ D = \frac{\delta \sin(k_2 l)}{\cos(k_2 l_1) \sin(k_2 l) - \cos(k_2 l) \sin(k_2 l_1)} \end{cases} \quad (9)$$

于是可得临界状态下的挠曲线方程为:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{k_3^2 \delta}{k_1^2 \sin(k_1 l_1)} \sin(k_1 x) - \frac{k_3^2 \delta}{k_1^2 l_1} x & 0 \leq x \leq l_1 \\ y_2 = -\frac{\delta \cos(k_2 l)}{\cos(k_2 l_1) \sin(k_2 l) - \cos(k_2 l) \sin(k_2 l_1)} \sin(k_2 x) \\ \quad + \frac{\delta \sin(k_2 l)}{\cos(k_2 l_1) \sin(k_2 l) - \cos(k_2 l) \sin(k_2 l_1)} \cos(k_2 x) - \delta & l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (10)$$

2 临界条件的导出

由附着支承点 B 处的连续性条件:

$$\frac{d y_1}{d x} = \frac{d y_2}{d x}, \quad x = l_1 \quad (11)$$

再根据(10)式得:

$$\begin{aligned} \frac{k_1^2 \delta}{k_1^2 \sin(k_1 l_1)} \cos(k_1 l_1) - \frac{k_1^2 \delta}{k_1^2 l_1} &= - \frac{k_2 \delta \cos(k_2 l) \cos(k_2 l_1)}{[\cos(k_2 l_1) \sin(k_2 l) - \cos(k_2 l) \sin(k_2 l_1)]} \\ &- \frac{k_2 \delta \sin(k_2 l) \sin(k_2 l_1)}{\cos(k_2 l_1) \sin(k_2 l) - \cos(k_2 l) \sin(k_2 l_1)} \end{aligned} \quad (12)$$

经整理得到:

$$\begin{aligned} \left[\frac{k_1^2}{k_1} \operatorname{ctg}(k_1 l_1) - \frac{k_1^2}{k_1 l_1} \right] [\cos(k_2 l_1) \sin(k_2 l) - \cos(k_2 l) \sin(k_2 l_1)] &+ k_2 [\cos(k_2 l) \cos(k_2 l_1) \\ &+ \sin(k_2 l) \sin(k_2 l_1)] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

(13)式即为外伸构件在双轴力作用下弹性稳定的临界条件。

当已知

$$\frac{P_2}{P_1 + P_2} = m, \quad \frac{l_2}{l_1} = n, \quad \frac{l_1}{l_2} = P \quad (14)$$

则可由(13)式求出构件所能承受的临界载荷: $(P_1 + P_2)_{cr}$ 。

3 等效计算长度的计算

在计算各种压杆的临界载荷时,通常都是利用计算长度将其表示为欧拉临界载荷的标准形式。而计算等效计算长度的关键是确定等效计算长度系数。

对于所讨论的受双轴压力作用的外伸构件,其临界载荷亦可表示为:

$$(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l_0)^2} \quad (15)$$

式中: l_0 —— 所取的实际几何长度

μ —— 等效计算长度系数

I —— 与 l_0 相对应段压杆的惯性矩

显然 μ 随所取的实际几何长度的不同而不同。下面以各种不同取法分别加以讨论。

3.1 以 AB 段作为实际几何长度($l_0 = l_1$)

由(5)式和(14)式可得:

$$k_1^2 = m k_2^2, \quad k_2^2 = \frac{m}{n} k_1^2, \quad l = l_1 \left(\frac{1+P}{P} \right) \quad (16)$$

$$\text{令 } \frac{1+P}{P} = q \quad (17)$$

代入到(13)式中即得:

$$\begin{aligned} \left[m \operatorname{ctg}(k_1 l_1) - \frac{m}{k_1 l_1} \right] \left[\cos\left(\sqrt{\frac{m}{n}} k_1 l_1\right) \sin\left(\sqrt{\frac{m}{n}} q k_1 l_1\right) \right. \\ \left. - \cos\left(\sqrt{\frac{m}{n}} q k_1 l_1\right) \sin\left(\sqrt{\frac{m}{n}} k_1 l_1\right) \right] + \sqrt{\frac{m}{n}} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{m}{n}} q k_1 l_1\right) \cos\left(\sqrt{\frac{m}{n}} k_1 l_1\right) \right. \\ \left. + \sin\left(\sqrt{\frac{m}{n}} q k_1 l_1\right) \sin\left(\sqrt{\frac{m}{n}} k_1 l_1\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{令 } Z = k_1 l_1 \quad (19)$$

(18) 式即成为以 Z 为未知数的一个超越方程, 可用数值方法并利用计算机对其进行求解。设其最小正根为 Z_{\min} , 则由(19)式和(5)式得:

$$Z_{\min} = \sqrt{\frac{(P_1 + P_2)_{cr}}{EI_1}} l_1 \quad (20)$$

$$\text{即: } (P_1 + P_2)_{cr} = \frac{Z_{\min}^2 EI_1}{l_1^2} = \frac{\pi^2 EI_1}{\left(\frac{\pi}{Z_{\min}} l_0\right)^2} \quad (21)$$

与(15)式相比较则得到以 AB 段长度为实际几何长度时的等效计算长度系数为

$$\mu_{AB} = \frac{\pi}{Z_{\min}} \quad (22)$$

3.2 以 BC 段作为实际几何长度 ($l_0 = l_1$)

由于 BC 段所受轴力为 P_2 , 习惯上将 $(P_1 + P_2)_{cr}$ 相对应的 P_{2cr} 表示为如下形式:

$$P_{2cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{(\mu l_2)^2} \quad (23)$$

同样, 可用与前面相同的方法求出 P_{2cr} , 从而得出以 BC 段为实际几何长度时的等效计算长度系数。更简便的方法是利用 μ_{BC} 与 μ_{AB} 的关系来得出 μ_{BC} 。将(21)式写成:

$$(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_{AB} l_1)^2} \quad (24)$$

由(14)式可得:

$$(P_1 + P_2)_{cr} = \frac{P_{2cr}}{m}, \quad I_1 = \frac{I_2}{n}, \quad l_1 = Pl_2 \quad (25)$$

代入(24)中可得到:

$$P_{2cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{\left(\sqrt{\frac{n}{m}} \mu_{AB} Pl_2\right)^2} \quad (26)$$

与(23)式相比就得到以 BC 段为实际几何长度时的等效计算长度系数为:

$$\mu_{AB} = \sqrt{\frac{n}{m}} P \mu_{BC} \quad (27)$$

需要说明的是, (21)式和(24)式表达的是同一个临界条件。因此, 在对受双轴力作用下的外伸构件进行稳定性计算时, 用两式中的任何一个即可。

仿照上面的方法, 还可以得到临界载荷的其它表示方法及相应的等效计算长度系数, 这里就不再一一列举。

利用(18)式和(19)式的计算结果及(22)式和(27)式, 我们得到了表1所示的外伸构件在双轴力作用下的等效计算长度系数。

4 结 语

在对受双轴力作用下的外伸构件进行整体稳定性计算时, 如以简支段为实际几何长度, 可查表1的分子, 即 μ_{AB} ; 如以外伸段为实际几何长度, 可查表1的分母, 即 μ_{BC} 。对表中未给

出的数据,可利用相邻的数据进行插值,或直利用本文的公式进行计算。

表 1 等效计算长度系数(μ_{AB} / μ_{BC})

$\frac{l_1}{l_2} = n$	$\frac{P_2}{P_1 + P_2} = m$	$l_1 / l_2 = P$						
		1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
1.00	0.25	1.47/2.94	1.56/2.81	1.68/2.68	1.84/2.57	2.06/2.47	2.37/2.37	2.86/2.29
	0.50	1.96/2.77	2.10/2.68	2.29/2.59	2.53/2.51	2.86/2.43	3.32/2.35	4.02/2.28
	0.75	2.35/2.72	2.54/2.64	2.77/2.56	3.08/2.49	3.48/2.41	4.06/2.34	4.92/2.27
0.85	0.25	1.51/2.79	1.61/2.68	1.74/2.57	1.92/2.48	2.16/2.39	2.51/2.31	3.04/2.24
	0.50	2.03/2.65	2.19/2.57	2.40/2.50	2.66/2.43	3.02/2.36	3.52/2.30	4.28/2.23
	0.75	2.45/2.61	2.66/2.54	2.91/2.48	3.24/2.41	3.68/2.35	4.30/2.29	5.24/2.23
0.70	0.25	1.58/2.64	1.69/2.54	1.84/2.46	2.04/2.39	2.31/2.32	2.70/2.26	3.28/2.20
	0.50	2.14/2.53	2.32/2.47	2.54/2.41	2.84/2.35	3.23/2.30	3.79/2.24	4.63/2.19
	0.75	2.59/2.50	2.81/2.45	3.10/2.39	3.46/2.34	3.95/2.29	4.63/2.24	5.67/2.19
0.55	0.25	1.67/2.48	1.81/2.41	1.98/2.35	2.21/2.30	2.52/2.24	2.96/2.20	3.63/2.15
	0.50	2.30/2.41	2.50/2.36	2.76/2.32	3.10/2.27	3.54/2.23	4.18/2.19	5.13/2.15
	0.75	2.79/2.39	3.05/2.35	3.37/2.31	3.78/2.27	4.33/2.23	5.11/2.19	6.27/2.15

表 1 可作为《塔式起重机设计规范》(GB /T 13752 - 92)中附录 H(计算长度系数 μ)的一个补充,亦可用于类似构件的稳定性计算。

参 考 文 献

- 1 S. P. Timoshenko, I. M. Gere, (eory of Elostic stability), McGRAW - HILL BOOK COMPANY, INC., 1961
- 2 建设部, 塔式起重机设计规范, (GB/T 13752 - 92), 1992. 11

(编辑:刘家凯)

(下转 77 页)

Analysis On 100TeV Family Events in Fe Emulsion Chamber

Lin Jing

(Dept. of Natural Science, CJU)

Abstract In this paper, a statistic analysis has been taken about the family events of 100TeV in Fe emulsion chamber. Some properties and results, such as vertical energy spectrum of family events, energy spectrum of γ -rays in family event, the transverse distribution of γ -rays in family event have been obtained. Conclusions have also been compared with those in Pb emulsion chamber and Monte Carlo simulation of SD-SHmodel. The special event that has very small transverse spread and strong penetration ability has been discovered.

Key Words cosmic ray, emulsion chamber, family events

(上接 60 页)

Stability Calculation of Simply Supported Cantilever Member Compressed By Two Axial Loads

Chen Jin Hu Xuebin

(Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Chongqing Jianshu University)

Abstract The stability problem of simply supported cantilever member compressed by two axial loads is studied in this paper. The author provided the coefficients of equivalent calculation length in the form of diagram for the cases of choosing simply supported part or cantilever part as actual length. The results of this paper can be directly used for the stability calculation of rotary header, single-suspension jib of tower cranes and other similar structural members, and can be considered as a supplement of (Design Rules for Tower Cranes)(GB/T 13752-92).

Key Words stability calculation, simply supported cantilever member, axial loads, coefficient of equivalent calculation length