

贮仓结构分段均质杆模型及无限自由度研究

14
87-92

刘存中

(郑州粮食学院建工系 450052)

戴国欣

(重庆建筑大学建筑工程学院 630045)

TU279.743

摘要 本文对筒承式园贮仓结构建立了一种分段均质杆动力计算模型并对其进行了无限自由度分析探讨。此精确分析方法具有实用意义。文末附有算例。

关键词 贮仓, 结构, 模型, 无限自由度

中图分类号 TU279[.743]

筒承式园贮仓,是粮食及煤炭、建材、冶金矿山等系统广泛应用的特种结构,特别是在地震区,建造的越来越多。因此,对其地震反应进行分析,十分必要。

研究表明,结构的地震反应与结构的动力特性密切相关^[1]。对于贮仓结构,我国开展对其振动的理论研究时间不长,深入研究也不够。特别是至今没有较精确的分析研究方法,仅有的某些简化方法,因无精确分析作为比的标准,失去了检查其可靠性的依据。

本文首先对筒承式园贮仓建立精确的分段均质杆动力模型,进而对其作无限自由度分析探讨。

1 筒承式园贮仓的分段均质杆模型

1.1 几种简化动力计算模型

筒承式园贮仓满仓时的实体结构如图1。由于满仓时分析的实用性强,且有了满仓时的分析结果,也不难将其用于空仓,故以下分析均指满仓情况。

1.1.1 单自由度体系的动力计算模型

单自由度体系的动力计算模型如图2(a)。这种模型把仓体及贮料集中到一个质点上,质点以无质量杆支撑。显然这种模型与实际结构差别较大。例如贮仓结构通常 H_2 和 H_1 的数倍,粮食系统贮仓有的 H_2 可达 H_1 的十倍以上,此时把整个 H_2 部分视为一个质点考虑,与原结构不符。

1.1.2 多自由度体系的动力计算模型

多自由度体系的动力计算模型如图2(b)。这种模型把仓体及贮料集中到有限个质点上,质点之间为无质量杆。此模型较单质点体系接近实际结构,但作为一种简化计算,质点不可能取多,故亦存在与单质点体系相似的缺点。

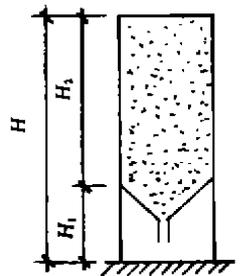


图1 筒承式园贮仓

收稿日期:1995-12-28

刘存中,男,1950年生,讲师

1.2 分段均质杆动力计算模型

分段均质杆动力计算模型如图 3。支撑部分 H_1 单位长度质量为 \bar{m}_1 ，其刚度为 EI ；仓体部分 H_2 单位长度质量为 \bar{m}_2 ，包括仓壁与贮料质量之和。由于是散粒贮料，质量增加但对刚度无甚影响^[2]，故其刚度仍为 EI 。这是一种无限自由度体系的动力计算模型，精确地模拟了实际结构的固有特性。

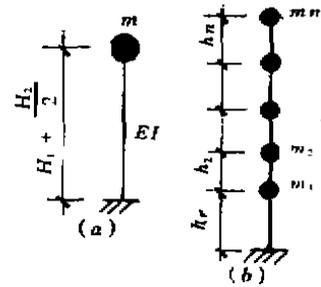


图 2 简化的动力计算模型

2 分段均质杆模型无限自由度分析

2.1 微分方程的建立

对高耸的贮仓结构，以弯曲变形为主。由图 3 的分段均质杆模型，取微段 dx ，其受力如图 4 所示。

振动微分方程为：

$$EI \cdot \frac{\partial^4 y_1(x, t)}{\partial x^4} + \bar{m}_1 \cdot \frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq H_1) \quad (1)$$

$$EI \cdot \frac{\partial^4 y_2(x, t)}{\partial x^4} + \bar{m}_2 \cdot \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (H_1 \leq x \leq H) \quad (2)$$

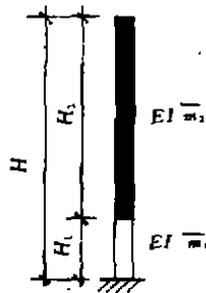


图 3 分段均质杆模型

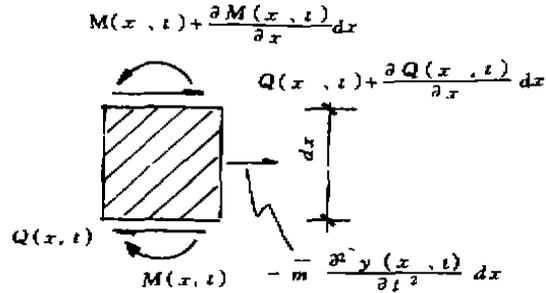


图 4 微元体受力

2.2 微分方程的解

一般可设 $y_1(x, t) = Y_1(x) \cdot T_1(t)$ ， $y_2(x, t) = Y_2(x) \cdot T_2(t)$ 由问题在 $X = H_1$ 处的连续条件知，当 $x = H_1$ 时，有

$$y_1(x, t) = y_2(x, t)$$

和 $Y_1(x) = Y_2(x) \quad (\text{对任意 } t)$

因此可直接取：

$$y_1(x, t) = Y_1(x) \cdot T(t) \quad (0 \leq x \leq H_1)$$

$$y_2(x, t) = Y_2(x) \cdot T(t) \quad (H_1 \leq x \leq H)$$

将其分别代入式(1)和(2)，经分离变量得：

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot T(t) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} - \frac{\bar{m}_1 \omega^2}{EI} \cdot Y_1(x) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} - \frac{\bar{m}_2 \omega^2}{EI} \cdot Y_2(x) = 0 \quad (5)$$

式中 ω^2 为常数。由式(3)

$$\text{解得: } T(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{则有: } y_1(x, t) = Y_1(x) \cdot A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y_2(x, t) = Y_2(x) \cdot A \sin(\omega t + \varphi)$$

再令 $K_1 = \frac{\bar{m}_1 \cdot \omega^2}{EI}$, $K_2 = \frac{\bar{m}_2 \cdot \omega^2}{EI}$, 式(4)和(5)可写作:

$$\frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} - K_1 \cdot Y_1(x) = 0 \quad \frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} - K_2 \cdot Y_2(x) = 0$$

其解分别为:

$$Y_1(x) = A_1 \operatorname{ch} k_1 x + B_1 \operatorname{sh} k_1 x + C_1 \cos k_1 x + D_1 \operatorname{Sink}_1 x$$

$$Y_2(x) = A_2 \operatorname{ch} k_2 x + B_2 \operatorname{sh} k_2 x + C_2 \cos k_2 x + D_2 \operatorname{Sink}_2 x$$

$$\text{式中 } k_2 = \xi \cdot k_1, \quad \xi = \sqrt[4]{\frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1}}$$

2.3 边界条件及连续条件

$$Y_1(x) |_{x=0} = 0 \quad \text{得 } A_1 + C_1 = 0 \quad (6)$$

$$Y_1'(x) |_{x=0} = 0 \quad \text{得 } B_1 + D_1 = 0 \quad (7)$$

$$EIY_2''(x) |_{x=H} = 0 \quad \text{有: } A_2 \operatorname{ch} k_2 H + B_2 \operatorname{sh} k_2 H - C_2 \cos k_2 H - D_2 \operatorname{Sink}_2 H \quad (8)$$

$$EIY_2'''(x) |_{x=H} = 0 \quad \text{有: } A_2 \operatorname{sh} k_2 H + B_2 \operatorname{ch} k_2 H + C_2 \sin k_2 H - D_2 \operatorname{Cosk}_2 H \quad (9)$$

$$Y_1(x) |_{x=H_1} = Y_2(x) |_{x=H_1} :$$

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{ch} k_1 H_1 + B_1 \operatorname{sh} k_1 H_1 + C_1 \cos k_1 H_1 + D_1 \operatorname{Sink}_1 H_1 = \\ A_2 \operatorname{ch} k_2 H_1 + B_2 \operatorname{sh} k_2 H_1 + C_2 \cos k_2 H_1 + D_2 \operatorname{Sink}_2 H_1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$Y_1'(x) |_{x=H_1} = Y_2'(x) |_{x=H_1} :$$

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sh} k_1 H_1 + B_1 \operatorname{ch} k_1 H_1 - C_1 \sin k_1 H_1 + D_1 \operatorname{Cosk}_1 H_1 = \\ \xi (A_2 \operatorname{sh} k_2 H_1 + B_2 \operatorname{ch} k_2 H_1 - C_2 \sin k_2 H_1 + D_2 \operatorname{Cosk}_2 H_1) \end{aligned} \quad (11)$$

$$Y_1''(x) |_{x=H_1} = Y_2''(x) |_{x=H_1} :$$

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{ch} k_1 H_1 + B_1 \operatorname{sh} k_1 H_1 - C_1 \cos k_1 H_1 - D_1 \operatorname{Sink}_1 H_1 = \\ \xi^2 (A_2 \operatorname{ch} k_2 H_1 + B_2 \operatorname{sh} k_2 H_1 - C_2 \cos k_2 H_1 - D_2 \operatorname{Sink}_2 H_1) \end{aligned} \quad (12)$$

$$Y_1'''(x) |_{x=H_1} = Y_2'''(x) |_{x=H_1} :$$

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sh} k_1 H_1 + B_1 \operatorname{ch} k_1 H_1 + C_1 \sin k_1 H_1 - D_1 \operatorname{Cosk}_1 H_1 = \\ \xi^3 (A_2 \operatorname{sh} k_2 H_1 + B_2 \operatorname{ch} k_2 H_1 + C_2 \operatorname{Sink}_2 H_1 - D_2 \operatorname{Cosk}_2 H_1) \end{aligned} \quad (13)$$

2.4 求频率

根据以上边界是条件和连续条件, 首先消去 A_1 、 B_1 、 C_1 和 D_1 可得

$$A_2 m_1 + B_2 m_2 - C_2 m_3 - D_2 m_4 = 0 \quad (14)$$

$$A_2 m_5 + B_2 m_6 + C_2 m_7 - D_2 m_8 = 0 \quad (15)$$

再从式(8)、(9)、(14)、(15)中消去 C_2 和 D_2 得

$$D_2 = A_2 m_9 + B_2 m_{10} \quad (16)$$

$$C_2 = A_2 m_{11} + B_2 m_{12} \quad (17)$$

$$A_2(m_1 - m_{11} m_3 - m_9 m_4) + B_2(m_2 - m_{12} m_3 - m_{10} m_4) = 0 \quad (18)$$

$$A_2(m_5 + m_{11} m_7 - m_9 m_8) + B_2(m_6 - m_{12} m_7 - m_{10} m_8) = 0 \quad (19)$$

其中:

$$\begin{aligned} m_1 &= (\xi^2 + 1) \operatorname{ch} k_2 H_1 \cdot \operatorname{ch} k_1 H_1 - \xi(\xi^2 + 1) \operatorname{sh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sh} k_1 H_1 + \\ &\quad (1 - \xi^2) \operatorname{ch} k_2 H_1 \cdot \operatorname{cosh} k_1 H_1 - \xi(1 - \xi^2) \operatorname{sh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sinh} k_1 H_1 \\ m_2 &= (\xi^2 + 1) \operatorname{sh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{ch} k_1 H_1 - \xi(\xi^2 + 1) \operatorname{ch} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sh} k_1 H_1 + \\ &\quad (1 - \xi^2) \operatorname{sh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{cosh} k_1 H_1 - \xi(1 - \xi^2) \operatorname{ch} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sinh} k_1 H_1 \\ m_3 &= (\xi^2 - 1) \operatorname{cosh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{ch} k_1 H_1 + \xi(\xi^2 - 1) \operatorname{sinh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sh} k_1 H_1 - \\ &\quad (1 + \xi^2) \operatorname{cosh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{cosh} k_1 H_1 - \xi(1 + \xi^2) \operatorname{sinh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sinh} k_1 H_1 \\ m_4 &= (\xi^2 - 1) \operatorname{sinh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{ch} k_1 H_1 - \xi(\xi^2 - 1) \operatorname{cosh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sh} k_1 H_1 - \\ &\quad (1 + \xi^2) \operatorname{sinh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{cosh} k_1 H_1 + \xi(1 + \xi^2) \operatorname{cosh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sinh} k_1 H_1 \\ m_5 &= \xi(\xi^2 + 1) \operatorname{sh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{ch} k_1 H_1 - (\xi^2 + 1) \operatorname{ch} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sh} k_1 H_1 + \\ &\quad (1 - \xi^2) \operatorname{ch} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sinh} k_1 H_1 + \xi(1 - \xi^2) \operatorname{sh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{cosh} k_1 H_1 \\ m_6 &= \xi(\xi^2 + 1) \operatorname{ch} k_2 H_1 \cdot \operatorname{ch} k_1 H_1 - (\xi^2 + 1) \operatorname{sh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sh} k_1 H_1 + \\ &\quad (1 - \xi^2) \operatorname{sh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sinh} k_1 H_1 + \xi(1 - \xi^2) \operatorname{ch} k_2 H_1 \cdot \operatorname{cosh} k_1 H_1 \\ m_7 &= \xi(\xi^2 - 1) \operatorname{sinh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{ch} k_1 H_1 + (\xi^2 - 1) \operatorname{cosh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sh} k_1 H_1 + \\ &\quad (1 + \xi^2) \operatorname{cosh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sinh} k_1 H_1 - \xi(1 + \xi^2) \operatorname{sinh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{cosh} k_1 H_1 \\ m_8 &= \xi(\xi^2 - 1) \operatorname{cosh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{ch} k_1 H_1 - (\xi^2 - 1) \operatorname{sinh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sh} k_1 H_1 - \\ &\quad (1 + \xi^2) \operatorname{sinh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{sinh} k_1 H_1 - \xi(1 + \xi^2) \operatorname{cosh} k_2 H_1 \cdot \operatorname{Cosh} k_1 H_1 \\ m_9 &= \operatorname{ch} k_2 H \cdot \operatorname{sinh} k_2 H + \operatorname{sh} k_2 H \cdot \operatorname{cosh} k_2 H \\ m_{10} &= \operatorname{sh} k_2 H \cdot \operatorname{sinh} k_2 H + \operatorname{ch} k_2 H \cdot \operatorname{cosh} k_2 H \\ m_{11} &= \operatorname{ch} k_2 H \cdot \operatorname{cosh} k_2 H - \operatorname{sh} k_2 H \cdot \operatorname{sinh} k_2 H \\ m_{12} &= \operatorname{sh} k_2 H \cdot \operatorname{cosh} k_2 H - \operatorname{ch} k_2 H \cdot \operatorname{sinh} k_2 H \end{aligned}$$

对于由式(18)、(19)所组成的方程组,欲使其有非零解,必须方程组系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} m_1 - m_{11} \cdot m_3 - m_9 \cdot m_4 & m_2 - m_{12} \cdot m_3 - m_{10} \cdot m_4 \\ m_5 + m_{11} \cdot m_7 - m_9 \cdot m_8 & m_6 + m_{12} \cdot m_7 - m_{10} \cdot m_8 \end{vmatrix} = 0$$

这就是所谓频率方程,解此频率(超越)方程可求得无限多个解: $K_{11}H$, $K_{12}H$, \dots , $K_{1n}H$, \dots 。进一步则可求得无限个频率 ω_1 , ω_2 , \dots , ω_n , \dots 。

2.5 求主振型

把 $\omega = \omega_n$ 之值代入式(18)、(19)中任一式得

$$\frac{B_2}{A_2} = - \frac{m_{1n} - m_{11n} \cdot m_{3n} - m_{9n} \cdot m_{4n}}{m_{2n} - m_{12n} \cdot m_{3n} - m_{10n} \cdot m_{4n}} = \eta_n^{(2)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

其中 ω_n 为当 $\omega = \omega_n$ 时的 m_i 之值。

又从式(16)、(17)得

$$\frac{C_2}{A_2} = m_{11n} + \eta_n^{(2)} \cdot m_{12n}, \quad \frac{D_2}{A_2} = m_{9n} + \eta_n^{(2)} \cdot m_{10n}$$

H_2 段第 n 个主振型为

$$Y_{2n}(x) = ch\xi K_{1n}x + \eta_n^{(2)} \cdot sh\xi K_{1n}x + m_{11n} + \eta_n^{(2)} \cdot m_{12n} \cdot \text{Cos}\xi K_{1n}x + m_{9n} + \eta_n^{(2)} \cdot m_{10n} \cdot \text{Sin}\xi K_{1n}x \quad (n=1, 2, \dots)$$

由于主振型与振幅大小无关,故 $Y_{2n}(x)$ 中已舍去了其前的系数。

以下求 H_1 段的第 n 个主振型。

由式(10)、(11)、(12)和(13)解出 A_2 、 B_2 、 C_2 和 D_2 ,再代回式(10)、(11)、(12)和(13)中,消去 C_1 和 D_1 ,得 A_1 与 B_1 的关系式。这里只给出结果,繁复的运算过程略去:

$$\frac{A_1}{B_1} = - \frac{(u_1 \cdot u_7 + u_5 \cdot u_3)(u_{12} \cdot u_{15} + u_{16} \cdot u_{11}) + (u_9 \cdot u_{15} + u_{13} \cdot u_{11})(u_4 \cdot u_7 + u_8 \cdot u_3)}{(u_2 \cdot u_7 + u_6 \cdot u_3)(u_{12} \cdot u_{15} + u_{16} \cdot u_{11}) + (u_{10} \cdot u_{15} + u_{14} \cdot u_{11})(u_4 \cdot u_7 + u_8 \cdot u_3)}$$

式中 $u_i = u_i(K_1 H)$ ($i=1, 2, \dots, 16$) 为已知函数。

当 $\omega = \omega_n$ 时,由上式得 B_1/A_1 ,又由式(6)、(7)两式知: $C_1/A_1 = -1, D_1/B_1 = -1$

H_1 段的第 n 个主振型为

$$Y_{1n}(x) = chK_{1n}x - \text{Cos}K_{1n}x + \eta_n^{(1)}(shK_{1n}x - \text{Sin}K_{1n}x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

其中 $\eta_n^{(1)} =$

$$- \frac{(u_{1n} \cdot u_{7n} + u_{5n} \cdot u_{3n})(u_{12n} \cdot u_{15n} + u_{16n} \cdot u_{11n}) + (u_{9n} \cdot u_{15n} + u_{13n} \cdot u_{11n})(u_{4n} \cdot u_{7n} + u_{8n} \cdot u_{3n})}{(u_{2n} \cdot u_{7n} + u_{6n} \cdot u_{3n})(u_{12n} \cdot u_{15n} + u_{16n} \cdot u_{11n}) + (u_{10n} \cdot u_{15n} + u_{14n} \cdot u_{11n})(u_{4n} \cdot u_{7n} + u_{8n} \cdot u_{3n})}$$

而 u_{in} 为当 $\omega = \omega_n$ 时的 u_i 之值。

3 算例

根据以上分析,作者编制了分段均质杆模型的计算机程序 TCL,在微机上应用非常方便。以下是应用一例。

【算例】 筒承式钢筋混凝土园贮仓,混凝土为 C20,筒内径 6.5 m,贮料容重为 7.5 kN/m³,贮仓壁厚 0.18 m,总高度 $H = 32$ m,支撑部分 $H_1 = 4$ m。分别求贮仓空仓与满仓时的前三个频率。

输入贮仓直径 D 、壁厚 t 、贮料容重 γ (空仓时令 $\gamma=0$) 等数据,即可算出所求频率,见下表。

计算频率值(量纲: $\sqrt{\frac{EI}{m_1}}/H_2$)

	ω_1	ω_2	ω_3
本文方法(空仓)	3.512	22.036	61.697
本文方法(满仓)	1.844	11.567	32.502
图2(b)简化方法(满仓)	1.824	5.723	31.719

由于通常对筒承式贮仓均是按图 2(b) 简化模型进行自振分析和抗震计算的,作为比较,表中

还给出了本算例在满仓情况下三质点简化模型的频率计算值。从计算结果来看,对该算例的第一及第三频率,简化方法已足够精确,但对第二频率,简化方法的误差较大,不宜采用。

4 结 语

分段均质杆模型的建立及无限自由度分析和微机程序的实现,为筒承式贮仓结构计算提供了一种精确的理论分析方法,具有较大的实用意义。它可以方便地精确计算贮仓的动力特性,又可以作为各种简化方法判断优劣、计算误差的标准。此外,若考虑散粒贮料的耗能与阴影作用,只需在 \bar{m}_2 中引入贮料有效系数 $\eta^{(3)}$,也可用本文方法和微机程序实现其精确计算。

限于篇幅,本文仅分析了筒承式圆贮仓的自振特性,其地震响应拟另文探讨。

参 考 文 献

- 1 郭继武. 建筑抗震设计. 北京:高等教育出版社,1990
- 2 刘存中. 筒承式圆贮仓底部剪力法与振型分解反应谱法的分析与研究. 郑州粮食学院学报,1995,(3)
- 3 姚伯英,侯忠良主编. 构筑物抗震. 北京:测绘出版社,1990

(编辑:王秀玲)

Study on The Mode of Sectional Even Mass Cantilever of Silos And the Analysis Method of Infinite Degree of Freedom

Liu Chunzhong

(Zhengzhou Grain College)

Dai Guoxin

(Faculty of Civil Engineering, CJU)

Abstract In this paper, a new mode of sectional even mass cantilever of silos was established and an analysis of infinite degree of freedom for it was carried out. In the end, a calculation example of this precise, reliable and practical mode was given.

Key Words silos, structure, mode, infinite degree of freedom