58-66　　O175.1

振动方程的稳定性

曹树孝
（重庆建筑大学基础科学系 四川重庆 630045）

摘　要　对二阶线性振动方程（包括自由振动和强迫振动）对照其通解与等价方程组的奇点类型和ЛЯПYHOB函数，全面讨论了振动过程的稳定性。对非线性方程，在附加一些必要的条件下作出ЛЯПYHOB函数，讨论了相应方程组的稳定性。

关键词　振动，稳定性，ЛЯПYHOB函数　振动方程、~~二阶线性~~ 微分方程
中图法分类号　O175.1

1　自由振动方程的稳定性

在文[1]中详细讨论了自由振动微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \tag{1}$$

的振动过程。其中，$2n$ 是阻力的阻尼系数，k^2 是恢复力的恢复系数，$n>0$，$k>0$。方程(1)称为有阻尼自由振动方程，它的通解为：

$$X(t)=\begin{cases} e^{-nt}(c_1\cos\sqrt{k^2-n^2}t+c_2\sin\sqrt{k^2-n^2}t),\ n<k\ (\text{小阻尼})\text{时；}\\ e^{-nt}(c_1\cos\sqrt{n^2-k^2}t+c_2\sin\sqrt{n^2-k^2}t),\ n>k\ (\text{大阻尼})\text{时，}\\ e^{-nt}(c_1t+c_2),\ n=k\ (\text{临界阻尼})\text{时。}\end{cases}$$

显然，由通解可以直接判定：当 $t\to\infty$ 时，物体都趋向于平衡位置。就是说，方程(1)的零解是稳定的。

为了说明这种稳定性，我们不同通解，学可以从微分方程的定性和稳定性理论两方面给予论证。使我们对方程（1）的稳定性有更加普遍的认识，说明利用等价方程组的奇点类型和ЛЯПYHOB函数及其导数的符号来判别稳定性更显得自然合理。

1.1　用微分方程的定性理论来认识

将方程(1)改写成等价的微分方程组（或系统）

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-k^2x-2ny\end{cases} \tag{2}$$

收稿日期　1995-05-23
曹树孝，男，1938年生，副教授

进行讨论。

由一般的二阶线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=cx+dy\end{cases}$$

的定性理论[2,3]可知，其特征方程和特征根为

$$r^2+pr+q=0,\qquad r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

其中，$p=-(a+d)$，$q=ad-bc$。当 $p>0$，$q>0$ 时，奇点 $O(0,0)$ 的类型分别是：

$p^2-4q<0$ 时，$O(0,0)$ 为稳定焦点；

$p^2-4q>0$ 时，$O(0,0)$ 为稳定结点；

$p^2-4q=0$ 时，$O(0,0)$ 为稳定临界结点。

将以上结论应用于线性方程组(2)，相应地有

$$p=-(a+d)=2n>0,\ q=ad-bc=k^2>0,\quad r_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$$

于是

$$p^2-4q=4(n^2-k^2)=\begin{cases}<0\ ,\ n<k\ (\text{小阻尼})\text{时};\\>0\ ,\ n>k\ (\text{大阻尼})\text{时};\\=0\ ,\ n=k\ (\text{临界阻尼})\text{时}。\end{cases}$$

这就说明：小阻尼振动相应于方程组(2)的奇点 $O(0,0)$ 为稳定焦点；大阻尼振动相应于(2)的奇点 $O(0,0)$ 为稳定结点；而临界阻尼振动相应于(2)的奇点 $O(0,0)$ 为稳定临界结点。可见，方程(1)的通解中三种阻尼振动恰好对应于三种稳定的奇点类型。因此，$t\to\infty$ 时，自由振动方程(1)的零解是稳定的。这个性质具有普遍意义。

1.2 用 ЛЯПУНОВ 稳定性理论来认识

仍由方程(1)等价的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-k^2x-2ny\end{cases}\tag{2}$$

进行讨论。

容易用能量积分法作出 ЛЯПУНОВ 函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\int_0^x k^2x\,dx=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}k^2x^2$$

从而

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}=-2ny^2$$

可见，$V(x,y)$ 为正定函数，$\dfrac{dV}{dt}$ 为负定函数，根据 ЛЯПУНОВ 稳定性判别定理[2]，可知方程组的零解是稳定的，并且除 $x=0$、$y=0$ 外，零解还是渐近稳定的。因此，当 $t\to\infty$ 时，自由(有阻尼)振动方程(1)的零解是稳定的，即物体都趋向于平衡位置。

以上我们对自由振动微分方程(1)从通解,奇点类型和构造ЛЯПУНОВ函数等三个方面论证了方程(1)存在平稳的振动过程,从而统一了我们对自由振动方程的稳定性的认识。

因方程(1)与常系数线性方程组是等价的,其特征根都具有负的实部,故系统的零解是渐近稳定的;由方程(1)的通解均含有因子 e^{-nt},从而

$$\lim_{t\to\infty}X(t)=0$$

因此,从方程(1)的通解判定其稳定性更是显然的。

2 强迫振动方程的稳定性

强迫振动方程的稳定性要比自由振动方程的稳定性复杂。具有周期性干扰力的强迫振动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=h\sin pt \tag{3}$$

我们先由复微分方程得出(3)的特解。

设复方程为

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2n\frac{dz}{dt}+k^2z=h\sin pt$$

令 $z=He^{-ipt}$, 则 $\frac{dz}{dt}=-ipHe^{-ipt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}=-p^2He^{-ipt}$

代入复方程,得

$$-p^2H-2npHi+k^2H=h,\quad H=\frac{[(k^2-p^2)+2npi]h}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}$$

于是,复方程的特解为

$$\begin{aligned}z&=\frac{[(k^2-p^2)+2npi]h}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}(\cos pt+i\sin pt)\\&=\frac{[(k^2-p^2)\cos pt-2np\sin pt]h}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}+i\frac{[(k^2-p^2)\sin pt+2np\cos pt]h}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\end{aligned}$$

其实部即为方程(3)的一个特解:

$$x^*(t)=\frac{h[(k^2-p^2)\cos pt-2np\sin pt]}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}$$

由"1"目,已得出方程(3)对应齐次方程的通解,即

$$X(t)=\begin{cases}e^{-nt}(c_1\cos\sqrt{k^2-n^2}t+c_2\sin\sqrt{k^2-n^2}t), & n<k;\\ e^{-nt}(c_1\cos\sqrt{n^2-k^2}t+c_2\sin\sqrt{n^2-k^2}t), & n>k;\\ e^{-nt}(c_1t+c_2), & n=k;\end{cases}$$

所以,强迫振动方程(3)的通解为

$$x(t)=X(t)+x^*(t)$$

令 $\cos\varphi=-\frac{2np}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$, $\sin\varphi=\frac{p^2+k^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$

则特解可表示为

$$x^*(t)=\frac{h\sin(pt+\varphi)}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$$

所以，

$$x(t)=X(t)+\frac{h\sin(pt+\varphi)}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$$

由方程(3)的通解，可以看到以下事实：

当 $C_1=C_2=0$ 时，方程(3)存在唯一的以$\frac{2\pi}{p}$为周期的周期解 $x^*(t)$。

当 $C_1\neq0$，$C_2\neq0$ 时，有$\lim\limits_{t\to\infty}X(t)=0$。因此，$t\to\infty$时，方程(3)的所有解都将逼近周期解 $x^*(t)$。这是由于周期性的干扰力 $h\sin pt$ 会使系统产生周期性振动。因此，$t\to\infty$时，存在平稳的振动过程。

下面，我们不去看方程(3)的繁复的通解，而直接采用 ЛЯПУНОВ 方法，讨论方程(3)的稳定性。

将方程(3)化为等价的一阶非自治微分方程组(即非自治系统)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-k^2x-2ny+h\sin pt\end{cases}\tag{4}$$

取

$$V(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\int_0^x k^2x\,dx=\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1}{2}y^2$$

则

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(4)}=\frac{\partial V_1}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}=-2ny^2+hy\sin pt$$

再取

$$\begin{aligned}V_2(x,y,t)&=\frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt}+2nx-h\int_0^t\sin pt\,dt\right]^2+\int_0^x k^2x\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[y+2nx+\frac{h}{p}(\cos pt-1)\right]^2+\frac{1}{2}k^2x^2\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(4)}&=\frac{\partial V_2}{\partial t}+\frac{\partial V_2}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V_2}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=-2nk^2x^2+\frac{hk^2}{p}x(1-\cos pt)\end{aligned}$$

故对系统(4)可取 ЛЯПУНОВ 函数为

$$\begin{aligned}V(x,y,t)&=V_1(x,y)+V_2(x,y,t)\\&=k^2x^2+\frac{1}{2}\left[y^2+(y+2nx+\frac{h}{p}(\cos pt-\frac{h}{p})^2\right]\\&\geqslant k^2x^2+\frac{1}{2}y^2>0\end{aligned}$$

从而

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4)}=\frac{dV_1}{dt}+\frac{dV_2}{dt}$$
$$=-2ny^2+hy\sin pt-2nk^2x^2+\frac{hk^2}{p}x(1-\cos pt)$$
$$\leqslant-|y|(2n|y|-h)-|x|(2nk^2|x|-\frac{hk^2}{p})$$

设

$$W(x,y)=-|y|(2n|y|-h)-|x|(2nk^2|x|-\frac{hk^2}{p})$$

则可由函数 $W(x,y)$ 确定出系统(4)的稳定性区域

当 $|x|>\frac{h}{2np}$，$|y|>\frac{h}{2n}$ 时，有 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4)}<0$；

$|x|\leqslant\frac{h}{2np}$ 时，因

$$W(x,y)=-2ny^2+h|y|-2nk^2x^2+\frac{hk^2}{p}|x|$$
$$\leqslant-2ny^2+h|y|+\frac{hk^2}{p}|x|$$
$$\leqslant-\left(2ny^2-h|y|-\frac{hk^2}{2np^2}\right)$$

取 $y_1=\dfrac{h+\sqrt{h^2+\dfrac{4h^2+k^2}{p^2}}}{4n}$ 所以，

当 $|x|\leqslant\frac{h}{2np}$，$|y|>y_1$ 时，有 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4)}<0$；

$|y|\leqslant y_1$ 时，因

$$W(x,y)=-2nk^2x^2+\frac{hk^2}{p}|x|+h|y|-2ny^2$$
$$\leqslant-2nk^2x^2+\frac{hk^2}{p}|x|+h|y|$$
$$\leqslant-\left(2nk^2x^2-\frac{hk^2}{p}|x|-hy_1\right)$$

取 $x_1=\dfrac{\dfrac{hk^2}{p}+\sqrt{\left(\dfrac{hk^2}{p}\right)^2+8nhk^2}}{4nk^2}$，所以

当 $|x|>x_1$，$|y|\leqslant y_1$ 时，有 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4)}<0$；

由以上讨论，可得方程(3)的解的有界区域为

$$U^*:\{-x_1\leqslant x\leqslant x_1,\ -y_1\leqslant y\leqslant y_1\}$$

而在相平面上连通开域为

$$U:\{x<-x_1,\ x>x_1;\ y\leqslant-y_1,\ y>y_1\}$$

使得对方程组(4)所取的 ЛЯПУНОВ 函数 $V(x,y,t)$为正定函数，且有正无穷大性，而使$\frac{dV}{dt}$为负定函数。从而方程组(4)的轨线都由 U 的内部经过边界 $x=\pm x_1$，$y=\pm y_1$ 进入 U^*内。显然，U^*是 U 的补集。线性方程组 (4) 在 U^*内存在唯一的以$\frac{2\pi}{p}$为周期的稳定的周期解[4]。因线性方程(3)所对应的齐次方程的特征根都具有负实部，故方程组(4)的周期解全局稳定。因此，$t\to\infty$时，必定存在一平稳的振动过程。

我们再回到文[1]中讨论过的无阻尼强迫振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=h\sin pt \tag{5}$$

其通解为

$$x(t)=X(t)+x^*(t)=\begin{cases}A\sin(kt+\varphi)+\dfrac{h}{k^2-p^2}\sin pt\ , & p\neq k \text{ 时;}\\ A\sin(kt+\varphi)-\dfrac{h}{2k}t\cos pt\ , & p=k \text{ 时。}\end{cases}$$

其中，A，φ 为任意常数。

由通解表明：当 $p\to k$ 时，$\left|\frac{h}{k^2-p^2}\right|$ 很大，物体不趋向于平稳位置；当 $p=k$ 时，$\frac{h}{2k}t$ 随 $t\to\infty$而无限增大(产生共振现象)，故方程(5)的解不稳定。

以上情况也可用 ЛЯПУНОВ 稳定性理论给予论证，因方程 (3) 无阻尼项时，即 $2n=0$，可将方程组(4)所取的 ЛЯПУНОВ 函数及其导数化为

$$V(x,y,t)=k^2x^2+\frac{1}{2}\left[y^2+\left(y^2+\frac{h}{p}\cos pt-\frac{h}{p}\right)^2\right]$$

$$\geqslant k^2x^2+\frac{1}{2}y^2>0 \qquad \text{(正定函数)}$$

$$\frac{dV}{dt}=hy\sin pt+\frac{hk^2}{p}x(1-\cos pt) \qquad \text{(变号函数)}$$

故方程(5)的解是不稳定的。

由有阻尼强迫振动方程(3)和无阻尼强迫振动方程(5)的解说明：在有阻尼力存在时，由于阻尼力和干扰力有相互抵消的作用，故解在某个区域内有界，从而存在平稳的振动过程，在无阻尼力存在时，由于周期性干扰力的作用，自然不会存在平稳的振动过程。

3　关于非线性振动方程的稳定性

由"1"目和"2"目，我们看到，通过 ЛЯПУНОВ 函数 $V(x,y,t)$及其导数$\frac{dV}{dt}$的符号的判定，可以得出对线性方程(1)，(3)，(5)的解完全一致的稳定性判别与解释。故这种方法尤其适合于大多数无法求解的非线性振动方程，对其进行定性和稳定性分析，并作出物理解释。

我们讨论一种范德液(Van der Pol)型的非线性方程的稳定性[5]

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\epsilon\left[1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{6}$$

其中，ε 是参数，它的等价微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x+\varepsilon y-\varepsilon y^3\end{cases}\tag{7}$$

由于$\dfrac{dx}{dt}=y$，方程(6)可写成

$$\frac{dy}{dt}+x=-\varepsilon y(y^2-1)$$

上式两边同乘以 y 后，可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2\right)=-\varepsilon y^2(y^2-1)$$

所以，系统(7)的 ЛЯПУНОВ 函数及其导数可取为

$$V(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2>0$$

$$\frac{dV}{dt}=-\varepsilon y^2(y^2-1)\leqslant 0\quad(\,|y|\geqslant 1\text{ 时})$$

可见，非线性振动系统的零解在 $|y|\geqslant 1$ 时是稳定的；$|y|<1$ 时是不稳定的。

我们来进一步研究非线性方程组(7)的解的性质。对应于(7)的线性方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x+\varepsilon y\end{cases}\tag{8}$$

其特征方程和特征根为

$$r^2-\varepsilon r+1=0,\qquad r_{1,2}=\frac{\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-4}}{2}$$

由参数 ε 的取值，可知奇点 $O(0,0)$ 的类型分别为：

$$\varepsilon\begin{cases}<4\text{ 时，为不稳定焦点；}\\ \geqslant 4\text{ 时，为不稳定结点；}\\ =0\text{ 时，有周期解。}\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\dfrac{-\varepsilon y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，故非线性方程组(7)与线性方程组(8)有相同的稳定性。

值得注意的是 $\varepsilon=0$ 时的周期解，即方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0\tag{9}$$

的通解

$$x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$$

可以看到，非线性方程(6)在 $\varepsilon\to 0$ 时，存在唯一的周期解，使方程(6)的所有解当 $t\to\infty$ 时，都趋向于此周期解。这种孤立的周期解就是方程(6)或方程组(7)的极限环。ε 取不同值时，便可得出不同的根限环。方程组(7)的所有轨线都趋向于相应的根限环。

方程(9)和(6)分别是下面更一般的非线性方程的特殊情形[5][6]。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0 \tag{10}$$

和

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varphi\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)+f(x)=0 \tag{11}$$

方程(10)的等价方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-f(x)\end{cases}$$

当满足：$f(x)=0$，$xf(x)>0$，$(x\neq0)$的条件时，可作出 ЛЯПҮНОВ 函数：

$$V(x,\ y)=\frac{1}{2}\ y^2+\int_0^x f(x)dx>0 \quad (正定函数)$$

使得$\frac{dV}{dt}=0$。所以，方程(10)的零解是稳定的。它的解在相平面上是一簇围绕原点的卵形封闭曲线。

方程(11)的等价方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-f(x)-\varphi(x,y)\end{cases}$$

当满足条件：$f(0)=0$，$xf(x)>0(x\neq0)$；$\varphi(x,\ 0)=0$，$y\varphi(x,\ y)>0(y\neq0)$；$\int_c^{+\infty}f(x)dx=+\infty$时，可作出 ЛЯПҮНОВ 函数：

$$V(x,\ y)=\frac{1}{2}\ y^2+\int_0^x f(x)dx>0 \quad (正定函数)$$

使得$\frac{dV}{dt}=-y\varphi(x,\ y)\leqslant 0$(负定函数)。从而，方程(11)的零解必是全局稳定的。同时，方程(11)还存在非零的周期解，兹举一例可以说明。

例　$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left[x^2+2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-1\right]\frac{dx}{dt}+x=0$$

化为等价方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+(1-x^2-2y^2)y\end{cases}$$

此方程组有唯一奇点 $O(0,0)$。作 ЛЯПҮНОВ 函数：

$$V(x,\ y)=x^2+y^2$$

则

$$\frac{dV}{dt}=2y^2(1-x^2-2y^2)\begin{cases}>0,\ x^2+y^2<\dfrac{1}{2}\ 时;\\ <0,\ x^2+y^2>1\ 时。\end{cases}$$

因$x^2+y^2=\frac{1}{2}$落在使$\frac{dV}{dt}=0$的椭圆$x^2+2y^2=1$的内部，而$x^2+y^2=1$落在该椭圆的外部(除x轴上两点重合外)。这说明从环域$\frac{1}{2}<x^2+y^2<1$内任意一点出发的轨线($x(t)$, $y(t)$)永远走不出此环域。根据Poincare－Bendixson环域定理，在此环域内(环域内无奇点)至少存在一条闭轨线，对应于原方程的非零的周期解。

由以上讨论可知，对非线性振动方程，应加上必要的限制性条件，才能保证解的稳定性，从而使物体存在平稳的振动过程。

参考文献

1 同济大学数学教研室．高等数学(下册)．北京 高等教育出版社，1990
2 贺建勋，王志成．常微分方程(下册)．长沙：湖南科学技术出版社，1981
3 蔡燧林，盛骤．常微分方程组与稳定性理论 北京：高等教育出版社，1986
4 王 联，王慕秋．非线性常微分方程定性分析．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1987
5 蔡燧林，钱祥征．常微分方程定性理论引论．北京·高等教育出版社，1994
6 J P. Lasulle, Stability Theory, for ardinary Differential Equations. J. Diff. Eqs. 1968, 4

The stability of oscilliation equation

Cao Shuxiao

(Department of Natural Science, Chongqing Jianzhu University, Chongqing, Sichuan 630045)

Abstract: This paper presents the second order linear oscillation equation(containing free oscillation and forcing osillation) . The stability of oscillatary process is discussed, the equation compares classification of sinqularities and Liyapunov function of equivalent equation system with its general salution. For nonlinear equation, the stability of corrsesponding equation system is discussed under some of addional condition, then the Liyapunov function is taken

Ket Words: oscillation stability, the Liyapunov function

(编辑：陈 蓉)