

矩阵递归法及在结构分析中的应用

78-84

张伟林

(安徽建筑工业学院 合肥 230022)

0241

摘要 结构分析的数值方法最终归结为代数方程组的求解。工程中相当广泛的一类结构，其定解方程为矩阵三对角式。本文首次提出矩阵递归法解决上述结构的力学计算问题。矩阵递归法推广了三对角方程组的递推法，以矩阵作为递归元，不须形成整体方程组，从而大大地节省内存，又简化了一系列的复杂计算。本文的最后通过实例说明了这种方法的优越性。

关键词 矩阵，递归法，结构分析，矩阵三对角方程组

中图法分类号 O241

矩阵代数在结构分析中的应用相当普遍。工程中一类有代表性的结构，其力学分析常常归结为一组矩阵递归方程的求解。本文在三对角方程组的追赶法的基础上，首次提出了矩阵递归法求解矩阵递推方程。在矩阵递归法中，以矩阵作为递推元，使一系列复杂的冗繁计算得到简化，计算量很小。另一个明显的优点是不须形成整体矩阵，从而节省计算机内存，程序设计也很方便。本文还通过例题在运算次数、内存占用、计算精度方面与其它方法进行了比较。

1 结构分析的矩阵递推方程

工程中使用范围相当广泛的一类工程结构，如建筑工程中的高层结构、塔式结构、正交网架、板壳、道桥、水坝等，交通运输中的机车车身、船舶、飞机机身等(图1)，其相邻的三个楼层，

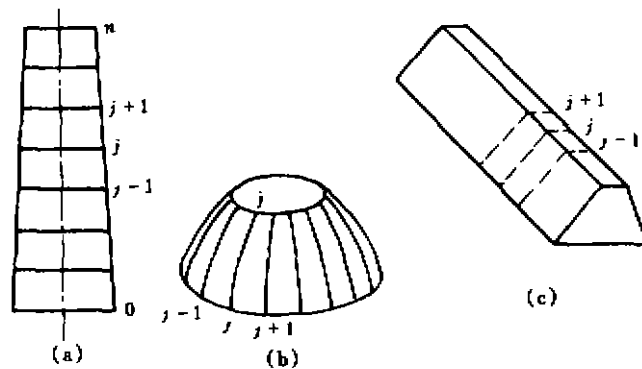


图1 一类可导出矩阵递推方程的工程结构

收稿日期: 1995-12-18

张伟林, 男, 1954年生, 副教授

或三条周线，或三条结线，或三片结面的力学量之间，存在下面的矩阵递归关系

$$\underline{A}_j \underline{x}_{j+1} + \underline{B}_j \underline{x}_j + \underline{C}_j \underline{x}_{j-1} = \underline{P}_j \quad (1)$$

式中， $\underline{A}_j, \underline{B}_j, \underline{C}_j$ 为 $m \cdot m$ 维的矩阵， $\underline{x}_j, \underline{P}_j$ 为 m 维向量。

(1)式可由多种方式导出，如转角位移方程，差分法，有限元法，子结构法等。 $\underline{A}_j, \underline{B}_j, \underline{C}_j$ 仅与几何物理参数有关， \underline{x}_j 为未知力学量。

以单跨高层框架为例，在水平荷载作用下，矩阵递推方程为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix}_{j+1} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix}_j + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} x \\ x' \end{Bmatrix}_{j-1} = \begin{Bmatrix} p \\ p' \end{Bmatrix}_j \quad (2)$$

上式中每个矩阵元素的表达式如下(见图 2)

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{i_{j+1}(2i'_{j+1} - i_{j+1})}{i_{j+1} + i'_{j+1}}, \\ a_{22} &= \frac{i'_{j+1}(2i_{j+1} - i'_{j+1})}{i_{j+1} + i'_{j+1}}, \\ a_{12} = a_{21} &= -\frac{3i_j + i'_{j+1}}{i_{j+1} + i'_{j+1}}, \\ b_{11} &= \frac{i_{j+1}(i_{j+1} + 4i'_{j+1})}{i_{j+1} + i'_{j+1}} + \frac{i_j(i_j + 4i'_j)}{i_j + i'_j} + 4i_j^{\circ}, \\ b_{22} &= \frac{i'_{j+1}(i'_{j+1} + 4i_{j+1})}{i_{j+1} + i'_{j+1}} + \frac{i'_j(i'_j + 4i_j)}{i_j + i'_j} + 4i'_j{}^{\circ}, \\ b_{21} = b_{12} &= a_{12} + c_{12} + 2i_j^{\circ}, \quad \underline{C}_j = \underline{A}_{j-1} \end{aligned}$$

$$p_j = \frac{h_{j+1}i_{j+1}}{2(i_{j+1} + i'_{j+1})} \sum_{l=j+1}^n p_l + \frac{h_j i_j}{2(i_j + i'_j)} \sum_{l=j}^n p_l$$

$$p'_j = \frac{h_{j+1}i'_{j+1}}{2(i_{j+1} + i'_{j+1})} \sum_{l=j+1}^n p_l + \frac{h_j i'_j}{2(i_j + i'_j)} \sum_{l=j}^n p_l$$

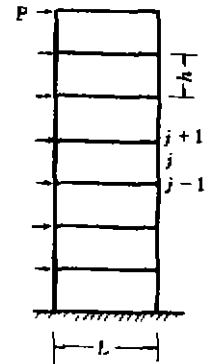


图 2 单跨高层框架

其中， i_j 为左柱的线刚度， i'_j 为右柱的线刚度， i_j° 为横梁线刚度，下标 j 表示第 j 层， p 为水平荷载。 h 为层高， x_j 为 j 层柱端转角。此外，还有两个边界条件

$$\underline{x}_0 = \underline{0}, \quad \underline{B}_n \underline{x}_n + \underline{C}_n \underline{x}_{n-1} = \underline{p}_n \quad (3)$$

其中

$$\underline{B}_n = \begin{bmatrix} \frac{i_n(i_n + 4i'_n)}{i_n + i'_n} + 4i_n^{\circ} & -\frac{3i_n i'_n}{i_n + i'_n} + 2i_n^{\circ} \\ -\frac{3i_n i'_n}{i_n + i'_n} + 2i_n^{\circ} & \frac{i'_n(i'_n + 4i_n)}{i_n + i'_n} + 4i'_n{}^{\circ} \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}_n = \begin{Bmatrix} \frac{i_n}{2i_n + i'_n} \\ \frac{i'_n}{2i'_n + i_n} \end{Bmatrix} h_n p_n$$

上述矩阵递推方程的详细推导过程可见参考文献[1-3]。

采用其它方法同样能导出(1)式。以[4]中的方法为例，考虑框架剪力墙联合工作时的微分方程(图 3)

$$EI v^{(4)}(z) - C_j v''(z) = P(z) \quad (4)$$

的通解为

$$v = k_1 + k_2 z + k_3 \cosh \lambda z + k_4 \sinh \lambda z + v^* \quad (5)$$

其中 v^* 为特解, k_i 为常数, v 为框剪结构的侧向位移。

由(5)式可以求出墙体的转角 θ_w , 弯矩 M_w 和剪力 Q_w 、框架的层间剪力 Q_f 。取未知量

$$\underline{x}(z) = \{ v \quad Q \quad \theta_w \quad M_w \}^T$$

其中, $Q = Q_w + Q_f$, 写出用 \underline{k} 表示 \underline{x} 的式子

$$\underline{x}(z) = \underline{T}(z) \underline{k} + \underline{x}^* \quad (6)$$

这里, $\underline{k} = \{ k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \}^T$ 为(5)式中的系数。由(6)式解出 \underline{k}

$$\underline{k} = \underline{T}^{-1}(z) (\underline{x}(z) - \underline{x}^*) \quad (7)$$

对于第 j 层来说, 将其上部坐标代入(6)式, 下部坐标代入(7)式, 得

$$\underline{x}_j = \underline{T}_j \underline{k} + \underline{x}_j^* \quad , \quad \underline{k} = \underline{T}_{j-1}^{-1} (\underline{x}_{j-1} - \underline{x}_{j-1}^*)$$

将后式代入前一式, 并前乘 \underline{T}_j^{-1} , 经整理得

$$\underline{T}_j^{-1} \underline{x}_j - \underline{T}_{j-1}^{-1} \underline{x}_{j-1} = \underline{T}_j^{-1} \underline{x}_j^* - \underline{T}_{j-1}^{-1} \underline{x}_{j-1}^* \quad (8)$$

让下标 j 增加 1, 上式写成

$$\underline{T}_{j+1}^{-1} \underline{x}_{j+1} - \underline{T}_j^{-1} \underline{x}_j = \underline{T}_{j+1}^{-1} \underline{x}_{j+1}^* - \underline{T}_j^{-1} \underline{x}_j^* \quad (9)$$

用(8)式减去(9)式, 并令

$$\underline{p}_j = -\underline{T}_{j+1}^{-1} \underline{x}_{j+1}^* + 2\underline{T}_j^{-1} \underline{x}_j^* - \underline{T}_{j-1}^{-1} \underline{x}_{j-1}^* \quad (10)$$

得

$$-\underline{T}_{j+1}^{-1} \underline{x}_{j+1} + 2\underline{T}_j^{-1} \underline{x}_j - \underline{T}_{j-1}^{-1} \underline{x}_{j-1} = \underline{p}_j \quad (11)$$

与(1)式比较可知, (11)式有同样的递推关系, 限于篇幅, 详细过程没有列出, 有兴趣者可参阅文献[4]。

2 矩阵递推方程的递归解

矩阵递归法的思想源于三对角方程组的追赶解法。在追赶法里是以变量作为递归元, 而这里是以矩阵作为递归元^[4]。

为了推导递归法的递归公式, 先考虑将(1)式的 n 个矩阵递推方程组装成整体方程组(实际上, 矩阵递归法是不需要组装整体方程组的, 这里只是为了叙述上的方便), 写成

$$[\underline{A}_j \quad \underline{B}_j \quad \underline{C}_j] \underline{x}_j = \underline{p}_j \quad (1)$$

将系数矩阵进行如下分解

$$[\underline{A}_j \quad \underline{B}_j \quad \underline{C}_j] = [\underline{L}_j \quad \underline{I} \quad \underline{O}] = [\underline{O} \quad \underline{\beta}_j \quad \underline{r}_j] \quad (12)$$

在(12)式中

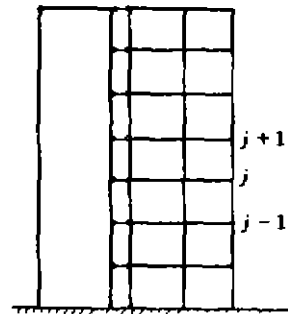


图 3 高层框剪体系

$$\begin{aligned}
 [\underline{A}_j \quad \underline{B}_j \quad \underline{C}_j]_j^T &= \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{C}_1 & & & & \\ \underline{A}_2 & \underline{B}_2 & \underline{C}_2 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & \underline{A}_{k-1} & \underline{B}_{k-1} & \underline{C}_{k-1} \\ & & & & \underline{A}_k & \underline{B}_k \end{bmatrix} \\
 [\underline{L}_j \quad \underline{I} \quad \underline{O}]_j^T &= \begin{bmatrix} \underline{I} & & & & & \\ \underline{L}_2 & \underline{I} & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & \underline{L}_{k-1} & \underline{I} & \\ & & & & \underline{L}_k & \underline{I} \end{bmatrix} \\
 [\underline{O} \quad \underline{\beta}_j \quad \underline{r}_j]_j^T &= \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 & \underline{r}_1 & & & & \\ & \underline{\beta}_2 & \underline{r}_2 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & \underline{\beta}_{k-1} & \underline{r}_{k-1} \\ & & & & & \underline{\beta}_k \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

其中 I 为 $m \cdot m$ 维单位阵, 将(12)右端乘开得

$$[\underline{A}_j \quad \underline{B}_j \quad \underline{C}_j]_j^T = [\underline{L}_j \quad \underline{\beta}_{j-1} \quad \underline{L}_j \underline{r}_{j-1} + \underline{\beta}_j \quad \underline{r}_j]_j^T \quad (13)$$

比较(13)式等号两端的对应项可知

$$\underline{\beta}_j = \underline{B}_j, \quad \underline{L}_j = \underline{A}_j \underline{\beta}_{j-1}^{-1}, \quad \underline{\beta}_j = \underline{B}_j - \underline{L}_j \underline{r}_{j-1}, \quad \underline{r}_j = \underline{C}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

容易证明, 对 $[\underline{L}_j \quad \underline{I} \quad \underline{O}]_j^T$ 求逆有如下结果

$$([\underline{L}_j \quad \underline{I} \quad \underline{O}]_j^T)^{-1} = [-\underline{L}_j \quad \underline{I} \quad \underline{O}]_j^T$$

用上式前乘(1')式, 得

$$[\underline{O} \quad \underline{\beta}_j \quad \underline{r}_j]_j^T \{x_j\} = [-\underline{L}_j \quad \underline{I} \quad \underline{O}]_j^T \{P_j\} = \{\delta_j\} \quad (15)$$

由上式可知

$$\underline{\delta}_j = \underline{P}_j - \underline{L}_j \underline{\delta}_{j-1}, \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

最后得出的 $\underline{r}_n = \underline{O}$, 则由(15)式, 可解出每个 x_j

$$\underline{x}_n = \underline{\beta}_n^{-1} \underline{\delta}_n, \quad \underline{x}_j = \underline{\beta}_j^{-1} (\underline{\delta}_j - \underline{r}_j \underline{x}_{j+1}), \quad (j = n-1, n-2, \dots, 2, 1) \quad (16)$$

由(14), (16)两式即可形成求解矩阵递推方程(1)的程序:

- 1) 令 $k = 1, \underline{\beta}_1 = \underline{B}_1, \underline{\delta}_n = \underline{p}_1$;
- 2) $k = k + 1, \underline{L}_k = \underline{A}_k \underline{\beta}_{k-1}^{-1}, \underline{\beta}_k = \underline{B}_k - \underline{L}_k \underline{C}_{k-1}, \underline{\delta}_k = \underline{P}_k - \underline{L}_k \underline{\delta}_{k-1}$;
- 3) 若 $k < n$, 则转向 2), 否则继续 4);
- 4) $\underline{x}_n = \underline{\beta}_n^{-1} \underline{\delta}_n, k = n$;
- 5) $k = k - 1, \underline{x}_k = \underline{\beta}_k^{-1} (\underline{\delta}_k - \underline{C}_k \underline{x}_{k+1})$;

6) 若 $k=1$, 则停止, 否则转向 5)。

3 算 例

设单跨 20 层刚架, 每层高度相同, $h=3\text{ m}$, 横梁跨度, $l=4.5\text{ m}$, $p=10\text{ kN}$ 。左柱、右柱、横梁的线刚度比值为 $i_j, i'_j, i_j^0=12:36:1$, 见图 2 所示。由(2),(3)式可得

$$\begin{bmatrix} 1.25 & -2.25 \\ -2.25 & -0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{j+1} \\ x'_{j+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.833 & -4.333 \\ -4.333 & 10.833 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ x'_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.25 & -2.25 \\ -2.25 & -0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{j-1} \\ x'_{j-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \end{Bmatrix} \frac{20-j}{4} P \quad j=2, 3, \dots, 19 \quad (\text{a})$$

$$\begin{bmatrix} 3.5833 & -2.0833 \\ -2.0833 & 5.5833 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{20} \\ x'_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.25 & -2.25 \\ -2.25 & -0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{19} \\ x'_{19} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \end{Bmatrix} \frac{P}{16} \quad (\text{b})$$

$$\begin{bmatrix} 1.25 & -2.25 \\ -2.25 & -0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.833 & -4.333 \\ -4.333 & 10.833 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \end{Bmatrix} \frac{19P}{4} \quad (\text{c})$$

采用(14)、(16)式, 并按本文的解题步骤编出程序, 结果列于表 1 中。

表 1 计算结果与高斯消去法比较

| 层数 | 本文解法 | | 高斯消去法 | |
|----|-----------|-----------|---------|---------|
| | 左节点转角 | 右节点转角 | 左节点转角 | 右节点转角 |
| 1 | 20.043215 | 20.660058 | 20.0432 | 20.6601 |
| 2 | 31.181873 | 32.072178 | 31.1819 | 32.0722 |
| 3 | 36.81731 | 37.861023 | 36.8174 | 37.8610 |
| 4 | 39.110179 | 40.210491 | 39.1102 | 40.2105 |
| 5 | 39.537772 | 40.461805 | 39.5378 | 40.4618 |
| 6 | 38.358232 | 39.432089 | 38.3582 | 39.4321 |
| 7 | 36.597677 | 37.621092 | 36.5977 | 37.6211 |
| 8 | 34.373799 | 35.334327 | 34.3738 | 35.3343 |
| 9 | 31.869071 | 32.759196 | 31.8691 | 32.7592 |
| 10 | 29.196253 | 30.011469 | 29.1961 | 30.0115 |
| 11 | 26.426349 | 27.164053 | 26.4263 | 27.1640 |
| 12 | 23.606246 | 24.625101 | 23.6062 | 24.6251 |
| 13 | 20.770398 | 21.349953 | 20.7704 | 21.3500 |
| 14 | 17.949213 | 18.449973 | 17.9492 | 18.4500 |
| 15 | 15.177255 | 15.600112 | 15.1772 | 15.6001 |
| 16 | 12.499354 | 12.848459 | 12.4993 | 12.8485 |
| 17 | 9.991207 | 10.264855 | 9.9912 | 10.2649 |
| 18 | 7.741878 | 7.970987 | 7.7419 | 7.9710 |
| 19 | 6.015135 | 6.121733 | 6.0151 | 6.1217 |
| 20 | 4.78116 | 5.131074 | 4.7811 | 5.1311 |

从表 1 可以看出,本文的方法与高斯消去法给出的结果是相同的。另外,本文的效率也是高的,对计算次数与内存占用两项指标与高斯消去法作了比较,见表 2。

表 2 计算效率的两项指标

| 指 标 | 本文解法 | 高斯消去法 | 比 较 |
|------|------|-------|-----|
| 运算次数 | 1100 | 8500 | 1/8 |
| 内存占用 | 400 | 1600 | 1/4 |

4 结束语

本文提出的方法有如下特点:

1) 本文提出的矩阵递归法在理论上是精确解法,实际应用时的计算精度取决于(1)式的物理近似程度。算例中的(a),(b),(c)式是精确式,因而表 1 中的结果是精确解。递归的积累误差取决于计算机字长;

2) 由递推方程(1)式控制的结构相当广泛,建筑、交通、水利、机械工程中许多属于这一类结构。但结构离散化时的结线上所含未知量应相同,否则递推关系较为复杂;

3) 本文的递归方法运行时间短,内存占用极小,效率较高。结构越是复杂、解题规模越大,越能体现出该方法的优越性。它不同于矩阵迭代法等近似方法,也不同于高斯消去法。迭代法的效率取决于迭代公式的选取和收敛速度,消去法需建立整体方程;

4) 本文方法能直接地适用于非线性问题、动力问题,对于周期性边界条件和环形结构则需对递归公式(14)、(16)式进行修改。这些内容将另文探索。

参 考 文 献

- 1 张伟林,于洪.一类结构非线性分析的边值法.安徽建筑工业学院学报,1993,(1):36-41
- 2 王磊,李家宝.高层结构精确计算法.上海科学出版社,1981:4-11
- 3 萧鹤麟,吕子华.矩阵函数论在结构分析中的应用.土木工程学报,1992,25(3):27-34
- 4 张伟林.高层建筑结构分析的矩阵传递法.安徽建筑工业学院学报,1995,(1):6-10
- 5 包世华,方鄂华.高层建筑结构设计.北京:清华大学出版社,1985:270-313
- 6 武汉大学,山东大学合编.计算方法.北京:人民教育出版社,1979:38-39

Application of matrix recurrence method to structure analysis

Zhang Weilin

(Dept. of Civil Engineering, Anhui Institute of Architecture, Hefei 230022)

Abstract Application of numerical method to structure analysis leads to solving a set of algebraic equation. The governing algebraic equations of many structures in engineering are matrix-triple diagonal ones. In this paper, MRM is proposed for the first time to solve the matrix-triple diagonal equations. The way to solve algebraic equation is spread by this method and complicated calculating process is simplified. Lastly, an example is given.

Key Words matrix, recurrence method, structure analysis, matrix-triple diagonal equations

(编辑:刘家凯)

科研成果

碱矿渣(JK)高强混凝土

内容简介及技术水平:

JK 高强水泥是以磨细矿渣外掺碱溶液所得的新型胶凝材料。用 JK 高强水泥配制的 JK 高强混凝土,工艺简单,只用普通混凝土的一般成型设备和施工方法,即容易获得 60 MPa 以上的高强混凝土。本研究的最高强度已达前苏联最高强度指标,早期强度(1d, 3d)则超过前苏联相应指标,缓凝问题有重大突破,超过前苏联缓凝研究的水平。