第19卷 第4期 重庆建筑大学学报 Vol.19 No.4
1997年8月 Journal of Chongqing Jianzhu University Aug.1997

用双向差分及阶差鉴别法建立灰色预测模型

(20) 115—122 [211.67]

蒋承仪
(重庆建筑大学基础科学系 630045)

摘 要 用双向差分方法建立GM(1,1)灰色预测模型并用于灾变预测问题。提出用阶差法作指数模型的初步鉴别。

关键词 灰色预测,生成序列,双向差分 阶差法
中图法分类号 O211.67

灰色系统理论的创立[1]为不确定性问题、信息不完全的数的研究提供了一种新的思考问题的方法。这个理论将一切随机变量都看成是在一定范围内变化的灰变量,在概念上改变了随机性问题的处理方法。它用累加生成方式来处理数据,将离散的杂乱无章的无序的原始数列呈现的不平稳性向平稳性转化,使原随机序列的随机性弱化而规律性增强,转化为适合用微分方程等方法建模的有序数列。灰色建模的基本思想就是从这种经累加生成的数列中寻找出它所接近的某种函数的规律,再由累减生成方式将生成模型的规律性还原,从中探索出原始数列的规律性。

灰色预测是灰色系统理论中一个十分重要的内容,是近年来颇受重视的预测方法之一。一般并不一定需要大量的历史数据,已证明只要不少于三个数据[6]就可进行分析预测,很适合小样本的情况,在一些短期预测问题上有时比通常使用的回归分析方法得出的长期趋势曲线预测效果要好。本文应用灰色建模是从数中找数的规律,用双向差分方法建立灰色预测模型并用计算阶差方式作模型的初步鉴别。

1 双向差分GM(1,1)模型

1.1 1—AGO序列

设$X^{(0)}(1),X^{(0)}(2),\cdots,X^{(0)}(n)$为一非负原始数列(注:若有负元素可采用正化处理方法)。

记

$$X^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}X^{(0)}(i)\quad(\mathrm{k}=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

称$X^{(1)}(1),X^{(1)}(2),\cdots,X^{(1)}(n)$为一次累加生成数列,记为1—AGO。显然,$X^{(1)}(1)=X^{(0)}$

收稿日期.1996-10-08

蒋承仪.女,1940年生,副教授

(1),且

$$X^{(0)}(k+1)=X^{(1)}(k+1)-X^{(1)}(k)\quad(k=1,2,\cdots,n-1)\tag{2}$$

若对$\{X^{(0)}(k)\}$作 r 次累加生成,则有 r—AGO 生成数列,即有

$$X^{(r)}(k)=\sum_{i=1}^{k}X^{(r-1)}(i)=X^{(r)}(k-1)+X^{(r-1)}(k)\quad(r\geqslant 1)$$

本文仅讨论 1—AGO 生成序列的建模问题、对具有这种生成方式的数列$\{X^{(1)}(k)\}$,宜建立微分方程

$$\frac{dX^{(1)}}{dt}+aX^{(1)}=b\tag{3}$$

来求生成数列 $X^{(1)}$ 的变化规律、再由(2)还原而寻找原始数列的规律性,这是灰色建模的基本方法。(3)中 a、b 为未知待估计的参数,其拟合过程是将微分方程对离散时刻差分化而逐步实现的。

差分是变量微小变化的描述,可以用来表示导数,微分方程的许多数值解法都是以差分为基础导出的,它也是插值、曲线拟合和数据修匀的重要工具(使非平稳数据达到平稳)。为充分利用原始数列及生成数列的信息,本文采用双向差分的方法求 a,b 的估计。

1.2 双向差分 GM(1,1)模型

将(3)写成

$$\frac{dX^{(1)}(t)}{dt}=-aX^{(1)}(t)+b=\sum_{i=0}^{1}a_iX_i^{(1)}(t)$$

其中

$$a_0=b,X_0^{(1)}(t)=1,a_1=-a,X_1^{(1)}(t)=X^{(1)}(t)$$

将微分处理成差分形式且作等间隔取样,则 $\Delta t=t+1-t=1$,于是利用线性表达式 $\sum_{i=0}^{1}a_iX_i^{(1)}(t)$ 对预报量$\Delta X^{(1)}(t)$作预报,即令

$$\Delta X^{(1)}(k)=\sum_{i=0}^{1}a_iX_i^{(1)}(k)\tag{4}$$

为估计a_i、利用时间序列分析中 Burg 估计的思想、将数据倒序使用一次以提高信息利用率。因此,(4)右边两项作为对左边增量的预报时,我们既考虑向前差分:

$$\Delta_bX_1^{(1)}(k)=X_1^{(1)}(k)-X_1^{(1)}(k-1)=X^{(0)}(k)$$

也考虑向后差分:

$$\Delta_aX_1^{(1)}(k)=X_1^{(1)}(k+1)-X_1^{(1)}(k)=X^{(0)}(k+1)$$

则(4)的预报误差分别为

$$\Delta_bX_1^{(1)}(k)-\sum_{i=0}^{1}a_iX_i^{(1)}(k)\triangleq\varepsilon_b(k),$$

$$\Delta_aX_1^{(1)}(k)-\sum_{i=0}^{1}a_iX_i^{(1)}(k)\triangleq\varepsilon_a(k)$$

使向前和向后差分的误差总和达到最小而求出未知参数,即令

$\varepsilon^2=\sum_{k=2}^{n-1}(\varepsilon_0^2(k)+\varepsilon_a^2(k))=\min$　（注：因$X_0^{(1)}(1)=X^{(0)}(1)$为初值，故取 $k=2,3,\cdots,n-1$）。

由最小二乘法，求使方程组

$$\begin{cases}\partial\varepsilon^2/\partial a_0=0\\ \partial\varepsilon^2/\partial a_1=0\end{cases}$$

的解 $\hat{a}_0$、$\hat{a}_1$。

求偏导结果有

$$\begin{cases}\sum_{k=2}^{n-1}\{-2[X^{(0)}(k)+X^{(0)}(k+1)]X_0^{(1)}(k)+4a_0(X_0^{(1)}(k))^2+4a_1X^{(1)}(k)X_0^{(1)}(k)\}=0\\ \sum_{k=2}^{n-1}\{-2[X^{(0)}(k)+X^{(0)}(k+1)]X^{(1)}(k)+4a_1(X^{(1)}(k))^2+4a_0X_0^{(1)}(k)X^{(1)}(k)\}=0\end{cases}$$

即有

$$\begin{cases}\sum_{k=2}^{n-1}X^{(0)}(k)X_0^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n-1}X^{(0)}(k+1)X_0^{(1)}(k)=2a_0\sum_{k=2}^{n-1}(X_0^{(1)}(k))^2+2a_1\sum_{k=2}^{n-1}X^{(1)}(k)X_0^{(1)}(k)\\ \sum_{k=2}^{n-1}X^{(0)}(k)X^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n-1}X^{(0)}(k+1)X^{(1)}(k)=2a_0\sum_{k=2}^{n-1}X_0^{(1)}(k)X^{(1)}(k)+2a_1\sum_{k=2}^{n-1}(X^{(1)}(k))^2\end{cases}\tag{5}$$

用 $n-2$ 除(5)中两式并注意到$X_0^{(1)}(k)\equiv1$，又记

$$\left.\begin{aligned}&l_0=\frac{1}{2(n-2)}\Big(\sum_{k=2}^{n-1}X^{(0)}(k)+\sum_{k=2}^{n-1}X^{(0)}(k+1)\Big)\\ &l_1=\frac{1}{2(n-2)}\Big(\sum_{k=2}^{n-1}X^{(0)}(k)X^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n-1}X^{(0)}(k+1)X^{(1)}(k)\Big)\\ &Z_0=\frac{1}{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}1^2=1,Z_1=\frac{1}{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}(X^{(1)}(k))^2\\ &Y_1=\frac{1}{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}X^{(1)}(k)\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

于是(5)可简写成

$$\begin{cases}a_0Z_0+a_1Y_1=l_0\\ a_0Y_1+a_1Z_1=l_1\end{cases}\tag{7}$$

记

$$\hat{A}=(\hat{a}_0,\hat{a}_1)^T,L=(l_0,l_1)^T$$
$$R=\begin{pmatrix}Z_0&Y_1\\Y_1&Z_1\end{pmatrix}\tag{8}$$

则方程(7)可写成

$$R\hat{A}=L$$

于是得 $\hat{A}=(\hat{a}_0,\hat{a}_1)^T$ 的最小二乘估计为

$$\hat{A}=R^{-1}L=(R^TR)^{-1}R^TL\tag{9}$$

将 $\hat{a}_0,\hat{a}_1$ 带回原微分方程(3)解之，最后得到时间响应函数

$$\hat{X}^{(1)}(k+1)=(X^{(0)}(1)+\hat{a}_0/\hat{a}_1)e^{\hat{a}_1 k}-\hat{a}_0/\hat{a}_1 \tag{10}$$

称(10)为双向差分GM(1,1)模型。对生成模型的计算值$\{\hat{X}^{(1)}(k)\}$累减生成还原，就得到原始数据相应的模型计算值为

$$\hat{X}^{(0)}(k+1)=\hat{X}^{(1)}(k+1)-\hat{X}^{(1)}(k)\quad(k=1,2,\cdots,n-1) \tag{11}$$

$$\hat{X}^{(0)}(1)=\hat{X}^{(1)}(1)$$

(11)式即是对未来时刻作预测的表示式。

2 模型的初步鉴别

为预测对象配合一个适合于实际发展变化规律的模型是预测有效的关键。按灰色建模的基本思想，由数累加生成方式以(3)式为基本数学模式导出的灰色预测模型$\{\hat{X}(k)\}$，它实际上是一指数模型，因此只有原始数据符合指数型变化规律，选用灰色建模才有实际意义，模型精度才高。尽管灰色预测模型有一些精度检验方法，如后验差检验、残差检验、关联度检验等，一般计算量都较大。下面我们从指数模型特点，提出阶差判断法作为模型的初步鉴别，以减少应用的盲目性。

大量研究表明，技术发展，甚至社会发展的许多定量特性表现为随时间按指数或接近指数规律增长，当接近极限和饱和点时，曲线斜率变小。若是在纵坐标轴为对数的半对数坐标系上，这种指数型图形是一条直线，因此，在趋势外推上，这成为判定指数函数模型的重要特征。

从研究课题的目的方面还应了解，指数曲线多用于研究在质变前的技术功能的发展速度的预测，而且其趋向可以帮助人们去认识发展的实际极限，而曲线斜率可告之其过去的增长规律和未来的增长状况。技术的发展主要取决于理论的创立、改进、应用和推广普及，而且一种信息量的增加往往与技术特性的提高相一致。于是在建立信息量随时间及有关因素增长的模型并转化到对技术功能加以预测这种认识下，自然应使用微分方程

$$\frac{dy}{dt}=ky \tag{12}$$

来刻划上述观念。式中y—技术发展的特性参数；t—时间；k—比例常数。方程清楚地表明了某项技术的功能特性，其增长速度$\frac{dy}{dt}$与达到的水平成比例（相对增长速度$\frac{dy}{dt}/y$是常数）。方程的解就是指数函数

$$y=y_0e^{kt}$$

y_0为$t=t_0$时的技术参数值。k和y_0可通过观察数据由最小二乘法确定。

灰色预测模型是由微分方程(3)式导出，与(12)有一常数之差，其解可称为修正指数模型。

另外还须指出，任何技术的发展都不可能按指数规律无限地外推，否则将达到荒谬的程度。因每种技术都有其自身的极限，越接近此极限，其技术发展速度减慢（曲线斜率变小），功能提高越困难，而且功能提高与数量增长越接近使用者满足的程度，则进一步提高其功能的价值就越小，因此指数曲线一般仅适用于预测远离极限值的技术发展情况。了解这些无

疑对一个实际问题在建模的目的及需要解决的问题方面是有启发的。

在作模型的初步选择时，如从样本点的散布趋势即图形的识别上，指数函数的单调性特征通常易与诸如抛物线函数—$y = a + bt + ct^2$；三次抛物线函数—$y = a + bt + ct^2 + dt^3$；幂函数—$y = at^b$；生长曲线函数—$y = l/(1 + ae^{-bt})$ 乃至线性函数—$y = a + bt$ 等曲线接近，有时难以直观确认为某种模型，往往要对较接近的几个模型进行误差分析，比较大小后加以确定。这里我们提出用阶差法进行比较，即通过计算时序模型的阶差来帮助我们对灰色预测所得指数模型的初步确认。

模型 $y_t = ae^{bt}$ 的一次差比率为

$$\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1} - y_{t-2}} = \frac{ae^{bt} - ae^{b(t-1)}}{ae^{b(t-1)} - ae^{b(t-2)}} = \frac{ae^{bt}(1 - e^{-1})}{ae^{b(t-1)}(1 - e^{-1})} = e^b \quad (t = 2, 3, \cdots, n)$$

是一固定常数。对修正指数模型 $y = c + ae^{bt}(b < 0)$ 不难验证它的一次差比率仍是常数 e^b。而上述的其余几个模型除线性函数的一次差比率为1外，其它均非固定值。这点无疑是将指数型与其它相近模型区别开来的一个重要参考指标。

综上所述，对某实际问题首先从建模的目的及需要解决的实际问题着眼，考虑是否具有指数函数所描述的一类问题的特点；观察样本点在半对数坐标系上的散布趋势是否成直线；计算时序数据的阶差，看是否在某一值附近摆动而变化不大（即使是指数型，因数据的随机性，其一次差比率也不会固定。另外，异常值可排除）。这些判断对正确应用灰色预测方法是实用的。

3　灰色灾变预测问题

将双向差分灰色预测模型GM(1,1)应用于对灾变一类问题的预测是很有意义的。

设 $X^{(0)} = \{X^{(0)}(1), \cdots, X^{(0)}(n)\}$ 为一原始数列，ξ 为某个指定的灾变异常值简称阈值。将 $X^{(0)}$ 中大于或小于 ξ 的点认为是异常值点，这些点组成的新的数列称为上限或下限灾变数列。对这些异常植出现的时刻（非灾变数据本身）作预报，首先建立灾变日期数据列，构造GM(1,1)模型。

将数据列 $\{X^{(0)}(i)\}$ 关于阈值 ξ 建立以下集合：

(1) 当 $\forall X_\xi^{(0)}(i') \geq \xi$，$i' \in (1', 2', \cdots n') \subset (1, 2, \cdots n)$，$\forall X_\xi^{(0)}(i') \in \{X^{(0)}(i)\}$，则称 $\{X_\xi^{(0)}(i')\}$ 为 $X^{(0)}$ 的上灾变集。

(2) 当 $\forall X_\xi^{(0)}(i') \leq \xi$，$i \in (1', 2', \cdots n') \subset (1, 2, \cdots n)$，$\forall X_\xi^{(0)}(i') \in \{X^{(0)}(i)\}$，则称 $\{X_\xi^{(0)}(i')\}$ 为 $X^{(0)}$ 的下灾变集。

将 $\{X_\xi^{(0)}(i')\}$ 及相应时刻 i' 视为平面上的点，记 P 为二维平面水平投影算子，即建立

$$P(i', X_\xi^{(0)}(i')) = i' \quad i' \in (1', 2', \cdots n') \subset (1, 2, \cdots n) \tag{13}$$

则称

$$V_\xi = \{P(1', X_\xi^{(0)}(1')), \cdots, P(n', X_\xi^{(0)}(n'))\} = \{1', 2', \cdots n'\}$$

为 $\{X_\xi^{(0)}(i')\}$ 的序集。

由阈值 ξ 建立了 $\{X^{(0)}(i)\}$ 到 $\{X_\xi^{(0)}(i')\}$ 的映射。并记

$$P(i', X_\xi^{(0)}(i')) = i' \triangleq y^{(0)}(i') \tag{14}$$

即灾变时刻集

$$(1',2',\cdots n')=(y^{(0)}(1'),y^{(0)}(2'),\cdots,y^{(0)}(n')) \qquad (15)$$

对新数列$\{y^{(0)}(i')\}$建立1—AGO生成，由(10)得灾变时刻$y^{(0)}(i')$的双向差分GM(1,1)预测模型：

$$\hat{y}^{(1)}(k+1)=(y^{(0)}(1)+\hat{a}_0/\hat{a}_1)e^{\hat{a}_1k}-\hat{a}_0/\hat{a}_1 \qquad (16)$$

引用[2]文中一实例。下列数据为1959－1987年河南某县历年的降水量(mm)：

$X^{(0)}(k)=\{X^{(0)}_{1959},\cdots,X^{(0)}_{1987}\}=\{16.6,162.9,53.6,148.0,161.5,137.0,494.0,152.1,247.8,104.3,134.2,92.7,88.1,165.2,280.2,216.7,99.0,202.8,242.4,153.5,256.0,85.5,192.5,298.2,172.8,451.5,69.9,152.1,169.9\}$.

若确定7月份降水量在50～100 mm为旱灾(小于50毫米为特旱)，试作旱灾发生年的预测。若设定阈值$\xi=100$ mm，则由数据得异常值序列集

$$X_\xi^{(0)}(i')=\{X_\xi^{(0)}(1'),\cdots,X_\xi^{(0)}(6')\}=(3,12,13,17,22,27)$$

将$X_\xi^{(0)}(6')=27$留作检验模型用，则建模序列

$$y^{(0)}(k)=\{3,12,13,17,22\}$$

对选择模型作初步判断，数据的单调性显然，对1—AGO序列：$y^{(1)}(k)=\{3,15,28,45,67\}$使用阶差法，算得一次差比值如下：

$$\frac{28-15}{15-3}=1.083\ 3,\quad \frac{45-28}{28-15}=1.307\ 6,\quad \frac{67-45}{45-28}=1.294\ 1$$

一次差比率从变化趋势上看出改变不大，故可以考虑采用灰色建模方式作预测。现由(6)算得

$$l_0=\frac{1}{2\times 3}[(12+13+17)+(13+17+22)]=15.666\ 67$$

$$l_1=\frac{1}{2\times 3}[(12\times 15+13\times 28+17\times 45)+(13\times 15+17\times 28+22\times 45)]=495$$

$$Z_0=1,\quad Z_1=\frac{1}{3}(15^2+28^2+45^2)=1\ 011.333\ 33$$

$$y_1=\frac{1}{3}(15+28+45)=29.333\ 33$$

$$R=\begin{pmatrix}1 & 29.333\ 33\\ 29.333\ 33 & 1\ 011.333\ 33\end{pmatrix},\quad L=(l_0,l_1)^T=\begin{pmatrix}15.666\ 67\\ 495\end{pmatrix}$$

由(9)算得估计量

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\end{pmatrix}=R^{-1}L=\begin{pmatrix}1\ 011.333\ 33 & -29.333\ 33\\ -29.333\ 33 & 1\end{pmatrix}/150.889\ 08\begin{pmatrix}15.666\ 67\\ 495\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8.776\ 16\\ 0.234\ 90\end{pmatrix}$$

于是得预测模型为

$$\hat{Y}(k+1)=(Y^{(0)}(1)+\hat{a}_0/\hat{a}_1)e^{\hat{a}_1k}-\hat{a}_0/\hat{a}_1=40.321\ 26e^{0.234\ 9}-37.321\ 26$$

用此预测模型作预测(由(11)作累减生成还原)，精度分析列于下表。

预报值为

$$1\ 958+27.320\ 43=1\ 985.320\ 43\approx 1\ 985$$

即1985年将发生旱灾，这与实际情况相吻合。

模型精度用后验差检验法进行。算出残差方差S_ε^2及原数据方差S_0^2,得后验差比值 C 为

$$C=\sqrt{S_\varepsilon^2}/\sqrt{S_0^2}=0.618\ 14/6.280\ 13=0.098\ 43<0.35$$

小误差概率 p 为

$$p=p(|\varepsilon(k)-\bar{\varepsilon}|<0.674\ 8S_0)=p(|\varepsilon(k)-0.228\ 17|<4.235\ 95)=1>0.95$$

根据 $p>0.95$, $C<0.35$ 预报模型定为精度一级(好),可见预报模型是可信的,可以用作发生灾害(旱)年份的预报。

年份	项目				
	统计值	预测值	精度	残差$\varepsilon(k)$	相对误差
1961	3	3	100%	0	0
1970	12	10.676 36	88.97%	1.323 64	11.03%
1971	13	13.503 26	96.27%	-0.503 26	3.87%
1975	17	17 078 69	99 54%	-0.078 69	0.46%
1980	22	21.600 83	98 19%	0.399 17	1.81%
预报	27	27 320 43			

4 结束语

对预测模型的精度及可信度应如何检验?已有文[3][4]对专著[1]中的后验差检验法及残差GM(1,1)修改模型的不足作过探讨。笔者认为数理统计中的假设检验、回归分析等方法亦可使用。如残差$\varepsilon(k)$刻划模型精度,则可检验假设$H_0:\mu_\varepsilon=0$来加以判断。若在显著水平$\alpha(0<\alpha<1)$下接受H_0,则可认为$\varepsilon(k)$近似$N(0,\sigma^2)$分布,则残差方差S_ε^2可用来估计σ^2。由正态分布的"3σ"法则知$\varepsilon(k)=y^{(0)}(k)-\hat{Y}^{(0)}(k)$分别以68.3%、95.4%、99.7%的把握在$(-S_\varepsilon\ S_\varepsilon)$、$(-2S_\varepsilon\ 2S_\varepsilon)$、$(-3S_\varepsilon\ 3S_\varepsilon)$内,即是残差方差实际上可刻划预测的绝对精度,这几个概率值就是一定精度要求下该预测模型的可信度。另对数据拟合因用不同的GM(1,1)预测模型得到满足精度要求的相差不多或不相同的预测效果时,建议寻求一个新的组合模型。当模型不够理想时,检查是否有异常值影响,有则剔除。

参考文献

1 邓聚龙．灰色系统基本方法　武汉:华中工学院出版社,1987

2 曹　军,胡万义．灰色系统理论与方法．哈尔滨·东北林业大学出版社,1993

3 朱宝璋．关于灰色建模的模型精度问题的研究　系统工程,1991

4 王　铮,和　莹．灰色系统建模方法的理论困难及其克服．北京:系统工程理论与实践,1990

5 孙明玺．经济技术预测和评价．北京:中国展望出版社,1984

6 李炳乾　论灰色理论的三数据建模．高校应用数学学报,1991,6(4)

Establishing Grey Forecasting Model with Two - Way Difference Method and Order Difference Method

Jiang Chengyi

(Dept. of Fundamental Sciences, Chongqing Jianzhu University, 630045)

Abstract In this paper, two - way difference method is used to establish GM (1, 1) grey forecasting model and applied to calamity forecasting problem. The preliminary discernment of using order difference method as exponent model is put forward.

Key Words grey forecasting, sequence of production, two - way difference

(编辑: 陈 蓉)

科研成果

屠宰废水一体化处理技术

内容简介及技术水平:

应用厌氧酸化—好氧法处理屠宰废水研究成果开发的一体化废水处理技术，已成功地应用于实际工程。经专家鉴定为国内先进水平。

性能特点及主要技术指标:

由于反应速度快，所需池容小，将厌氧酸化、好氧、沉淀等有机地组合在一个构筑物内、处理后出水各项指标均达到国家排放标准。本项目具有工程量少、占地面积小、投资省、流程简单、操作方便的特点。是一项可靠、经济的先进技术。