

# 蓄冰球的热工特性研究与结构优化

②  
6-12

张力君 田胜元  
(重庆建筑大学城市建设学院 400045)

TB611  
~~TB612~~  
TB657

**摘要** 通过对国内应用较为普遍且颇有前景的双蕊芯冰球的蓄冰过程进行建模,并用摄动法对该凝固问题求解,得出了凝固总时间与  $St$  数以及  $Bi$  数之间的关系式,分析了内外管径比  $\eta^*$  和  $Bi$  数对凝固过程的影响,并给出了优化设计这种蕊芯冰球的准则表达式。

**关键词** 双蕊芯冰球, 摄动方法, 边界条件, 凝固

中图法分类号 TB612 蓄冰球, 冰蓄冷系统, 热工特性, 结构优化, 制冷设备

根据美国制冷工业协会 (ARI) 1994 年出版的《蓄冷设备热性能指南》,蓄冷设备可分为冰盘管、冰球、片冰滑落、冰晶等几种形式。其中应用最广泛的是冰盘管与冰球。关于冰盘管的热工特性,美国学者 R. E. Stewart 和 S. C. Sliver 以及我国台湾的杨冠雄博士均作了定性的研究 [1, 2, 3]。而对于冰球式蓄冷设备的研究与开发则显得薄弱一些。由于密封球体内结冰与融冰过程是一个伴随着相变的导热与对流换热的复杂过程,掠过冰球的载冷剂的流动和换热过程也很复杂,因此目前能看到的有关冰球蓄冷与放冷方面的文章和资料较少。国内较早研究冰球特性的是清华大学的赵庆珠教授,她提出了单个圆球型冰球的蓄冰与融冰过程的数学模型 [4],而对于含有金属蕊芯的冰球的研究却没有涉及。由于金属蕊芯有利于物理晶核的形成,减少过冷度,相应地增加了传热速度,缩短了蓄冷和放冷的时间,因而成为国内应用较为普遍且颇有前景的一种蓄冰装置,因此对其进行研究,了解其在蓄冰(融冰)过程中的传热特性,对于这种蕊芯冰球的生产、设计和使用具有重要意义。

## 1 数学模型的建立与求解

考察双蕊芯冰球,可将其分解为圆柱形几何形状(中心部位,如截面图 a 所示)以及环形空腔几何形状(如截面 b 所示)两部分,截面 a 为圆柱体外管内凝固问题,截面 b 为环形空腔内外两侧同时凝固问题,两个问题彼此独立,可单独求解。假定相变介质中,热量的传递主要依靠热传导,不考虑液相中的对流。相变材料的物性参数均为常量,且外壁对流换热系数为定值。于是该凝固问题的无量纲数学描述如下:

### 1.1 圆柱外管内凝固问题(参见图 1a)

$$S_k \cdot \frac{\partial u_a}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_a}{\partial x} \quad S_a < x < 1 \quad (1)$$

收稿日期: 1997-08-05

张力君,男,1964年生,博士生

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} = -Bi(u_a - 1) \quad x = 1 \quad (2)$$

$$u_a = 0 \quad x = S_a \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} = -\frac{dS_a}{d\tau} \quad x = S_a \quad (4)$$

$$u_a = 0, S_a = 1 \quad \tau = 0 \quad (5)$$

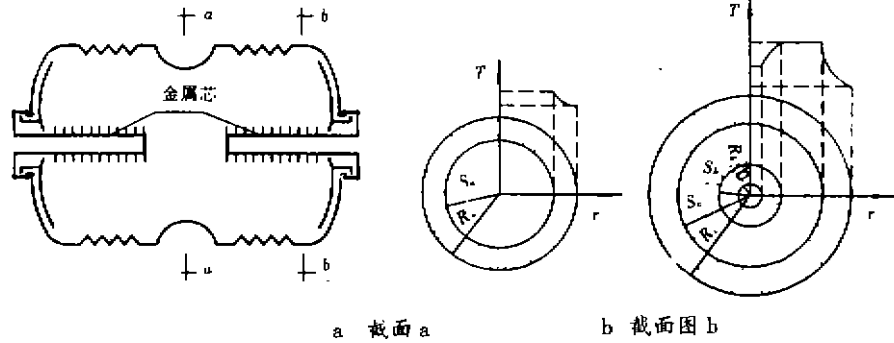


图 1 双金属蕊芯冰球

### 1.2 环形空腔内外两侧同时凝固问题(参见图 1b)

#### 1.2.1 金属蕊芯外的凝固问题

$$S_a \cdot \frac{\partial u_b}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_b}{\partial x} \quad \eta^* < x < S_b \quad (6)$$

$$u_b = 1/2 \quad x = \eta^* \quad (7)$$

$$u_b = 0 \quad x = S_b \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial x} = -\frac{dS_b}{d\tau} \quad x = S_b \quad (9)$$

$$u_b = 1/2, S_b = \eta^* \quad \tau = 0 \quad (10)$$

#### 1.2.2 外壳的内凝固问题

$$S_c \cdot \frac{\partial u_c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_c}{\partial x} \quad S_c < x < 1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial x} = Bi(u_c - 1) \quad x = 1 \quad (12)$$

$$u_c = 0 \quad x = S_c \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial x} = -\frac{dS_c}{d\tau} \quad x = S_c \quad (14)$$

$$u_c = 0, S_c = 1 \quad \tau = 0 \quad (15)$$

其中各无量纲量的定义如下：

$$u = \frac{T - T_f}{T_w - T_f}; \quad x = \frac{r}{R}; \quad s = \frac{\zeta}{R}; \quad Bi = \frac{h \cdot R}{k}; \quad \tau = \frac{C_p(T_f - T_w)}{L} \cdot \frac{at}{R} = S_a \cdot F_0$$

其中  $S_a = C_p(T_f - T_w)/L$ ，即 Stefan 数，表示材料在相变过程中显热与潜热之比； $F_0 = a \cdot t/R$  为 Fourier 数； $Bi = h \cdot R/k$  为 Biet 数。 $a$  为导温系数； $C_p$  为比热； $h$  为换热系数； $k$  为

导热系数;  $L$  为熔化潜热;  $r$  为一维柱坐标;  $R$  圆柱体半径;  $S$  为无量纲固液界面;  $T$  为温度;  $u$  为无量纲量温度;  $x$  为无量纲距离;  $\tau$  为无量纲时间;  $\eta$  为无量纲凝固时间;  $\eta^*$  为带蕊芯部分内外半径比,  $\eta^* = R_0/R_c$

对于以水作为相变介质而言, 比值  $C_p/L$  为 0.0057, 因此当温差  $T_f - T_w$  不大时, Ste 数一般是一个小量, 可以作为摄动参数  $\epsilon = Ste$ 。对应于  $\epsilon = 0$  的方程就是不考虑显热时的准静态方程。因此, 在物理上, 摄动参数的这种选择相当于认为解是由准静态解加上考虑显热时的修正项。

### 1.3 圆柱体内凝固问题的解

以  $Ste = \epsilon$  为摄动参数, 对方程 (1) ~ (5) 采用摄动法求解, 将自变量  $\tau$  与  $u$  和  $S$  一样进行渐近展开, 即令

$$\tau_n = \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \tau_n(\eta) \quad (16)$$

$$u_n(x, \eta, \epsilon) = u_{n0}(x, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_{nn}(\eta) \quad (17)$$

$$S_n(\eta, \epsilon) = S_{n0}(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n S_{nn}(\eta) \quad (18)$$

代入方程 (1) ~ (5), 并比较  $\epsilon$  的等幂次项系数。对  $\epsilon$  零次幂以及一次幂, 方程分别为:

$$n = 0 \quad \frac{\partial^2 u_{n0}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_{n0}}{\partial x} = 0 \quad S_{n0} < x < 1 \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_{n0}}{\partial x} = -Bi(u_{n0} - 1) \quad x = 1 \quad (20)$$

$$u_{n0} = 0 \quad x = S_{n0} \quad (21)$$

$$\frac{\partial u_{n0}}{\partial x} = -\frac{dS_{n0}}{d\tau} \quad x = S_{n0} \quad (22)$$

$$u_{n0} = 0, \quad S_{n0} = 1 \quad \tau = 0 \quad (23)$$

$$n = 1 \quad \frac{\partial^2 u_{n1}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u_{n1}}{\partial x} = \frac{\partial u_{n0}}{\partial \tau} \quad S_{n0} < x < 1 \quad (24)$$

$$\frac{\partial u_{n1}}{\partial x} = -Bi u_{n1} \quad x = 1 \quad (25)$$

$$u_{n1} + S_{n1} \frac{\partial u_{n0}}{\partial x} = 0 \quad x = S_{n0} \quad (26)$$

$$\frac{\partial u_{n1}}{\partial x} + S_{n1} \frac{\partial^2 u_{n0}}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{n0}}{\partial x} \cdot \frac{d\tau}{d\eta} = -\frac{dS_{n1}}{d\eta} \quad x = S_{n0} \quad (27)$$

$$u_{n1} = 0, \quad S_{n1} = 1, \quad \tau_1 = 0 \quad \tau = 0 \quad (28)$$

从  $\epsilon$  的零次幂方程组不难求得

$$u_{n0} = \frac{Bi}{1 - Bi \cdot \ln S_{n0}} \ln \frac{x}{S_{n0}} = G(S_{n0}) \ln \frac{x}{S_{n0}} \quad (29)$$

$$\eta = (1 - S_{n0}^2) \left( \frac{1}{2Bi} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} S_{n0}^2 \cdot \ln S_{n0} \quad (30)$$

其中  $G(S_{a0}) = Bi / (1 - Bi \cdot \ln S_{a0})$ , 将(29)式代入  $\epsilon$  的一次幂方程组, 便得到

$$u_{\epsilon 1} = -\frac{G^2(S_{a0})}{4 S_{a0}^2} \left\{ x^2 \left( \ln x - \frac{1}{Bi} - 1 \right) + [A \cdot G(S_{a0}) - S_{a0}^2 \cdot G(S_{a0}) - S_{a0}^2] \cdot \left( \ln x - \frac{1}{Bi} + A \right) \right\} + S_{a1} \frac{G^2(S_{a0})}{S_{a0}} \left( \ln x - \frac{1}{Bi} \right) \quad (31)$$

其中  $A = 2/Bi^2 + 2/Bi + 1$

利用(27)式及相变初始条件, 经过一系列的数学变换, 便可以得到:

$$S_{a1} = \frac{G(S_{a0})}{4 S_{a0}} (S_{a0}^2 - 1) \quad (32)$$

$$\tau_{\epsilon 1} = \frac{G(S_{a0})}{4} (S_{a0}^2 - A) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Bi} \right) \quad (33)$$

由此得到该凝固问题的第一级摄动解为:

$$S = S_{a0} + \epsilon S_{a1} = S_{a0} + \epsilon \frac{G(S_{a0})}{4 S_{a0}} (S_{a0}^2 - 1) \quad (34)$$

$$\tau = \eta + \epsilon \tau_{\epsilon 1} = \eta + \epsilon \left[ \frac{G(S_{a0})}{4} (S_{a0}^2 - A) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Bi} \right) \right] \quad (35)$$

当蓄冷介质完全凝固即固液界面移动到圆柱中心时, 有  $S = 0$ , 即

$$S_{a0} + \epsilon \frac{G(S_{a0})}{4 S_{a0}} (S_{a0}^2 - 1) = 0 \quad (36)$$

将  $G(S_{a0})$  的表达式代入上式并整理得:

$$\epsilon / S_{a0}^2 + 4 \ln S_{a0} = 4 / Bi + \epsilon \quad (37)$$

将(37)式与(35)式联立求解, 经化简, 并舍去高阶小量, 最后得到凝固終了时的时间  $\tau_f$  的关系表达式:

$$\tau_f = \frac{1}{4} + \frac{1}{2Bi} + \epsilon \left( \frac{1}{5Bi} + \frac{1}{2} \right) \quad (38)$$

如果取纵坐标为无量纲时间  $\tau$ , 横坐标为无量纲界面位置  $S_{a0}$ , 按(35)式取不同的  $\epsilon$  与  $Bi$  值作图, 便得到四种不同边界条件时(即  $Bi$  不同)的界面位置随时间变化的曲线, 见图2~图5。

从图2~图5可以看出, 固液界面位置随时间而逐步下降, 下降速度因  $Bi$  数不同而显著变化。对  $Bi = 0.1$ , 即外部对流热阻远比凝固体的内阻大的情况, 因外热阻不随时间而改变, 因此整个凝固过程较为迟缓, 所需时间较长。对  $Bi = 1$  的情况, 下降速度几乎为直线, 只是在接近凝固終了时才出现拐点, 总凝固时间缩短了许多。当  $Bi \geq 10$  乃至  $Bi = \infty$  时(相当于定温边界条件)下降速度基本为直线, 且整个凝固过程所需的时间也趋于相等。这说明随着  $Bi$  数的增大,  $Bi$  数的变化对凝固总时间的影响逐渐减弱, 同时也说明, 单纯改变外部换热条件(即改变  $h$  值)是有限的, 当此值达到某一数值后, 无论怎样提高  $h$ , 对凝固过程影响不大。

从图2~图5还可以看出, 界面位置的移动因相变介质的特性  $\epsilon$ —无量纲潜热而变化。

当  $\epsilon = 0$  时, 对应的曲线是用准静态法计算出来的, 当  $\epsilon \leq 0.1$  时, 界面位置的变化情况与  $\epsilon = 0$  时差别很小(对  $\epsilon = 0.0057$  的情况, 相对差值在5%以下), 因此, 当  $\epsilon \leq 0.1$  时, 可以

近似地用准静态法求解界面的位置。这是一条很重要的结论。根据这条结论在计算环形空腔的凝固问题时,其推导过程将精简许多。

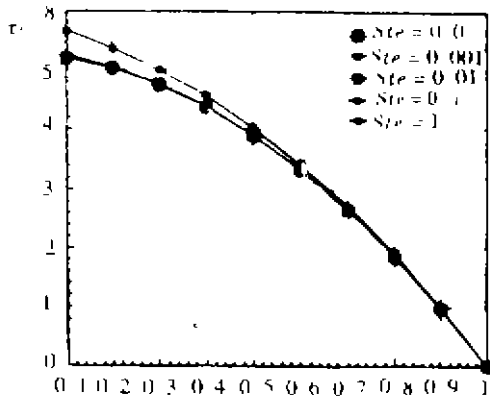


图 2  $Bi = 0.1$  时界面位置随时间变化曲线

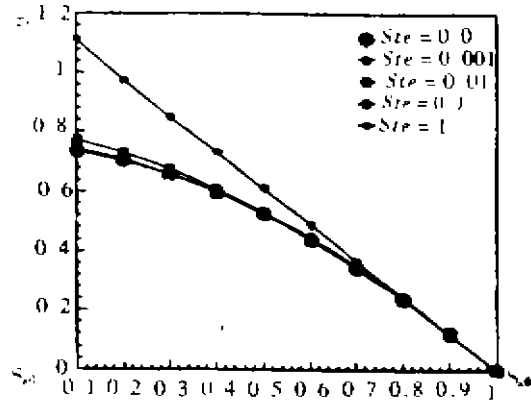


图 3  $Bi = 1$  时界面位置随时间变化曲线

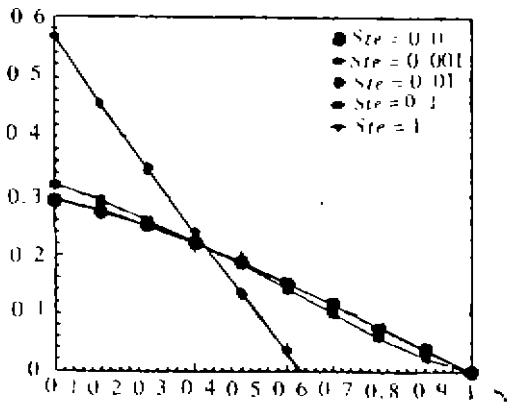


图 4  $Bi = 10$  界面位置随时间变化曲线

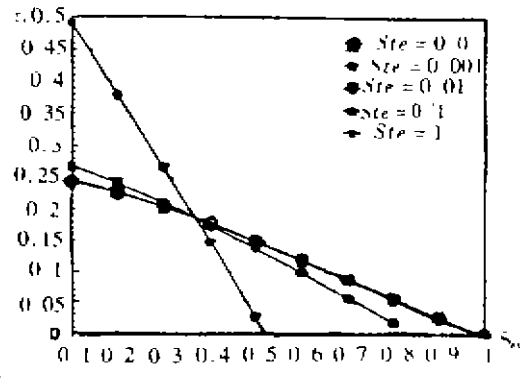


图 5  $Bi = \infty$  时界面位置随时间变化曲线

### 1.4 环形空腔的凝固问题求解

#### 1.4.1 金属蕊芯的外凝固

对方程组(6)~(10),令  $\epsilon = 0$ ,则此准静态问题的通解为

$$u_b = -\frac{1}{2} \frac{\ln \frac{x}{S_b}}{\ln \frac{S_b}{\eta^*}} \quad (39)$$

$$\tau_b = S_b^2 \cdot \ln \frac{S_b}{\eta^*} - \frac{1}{2} S_b^2 + \frac{\eta^{*2}}{2} \quad (40)$$

#### 1.4.2 外壳的内凝固问题

对方程组(11)~(15),并令  $\epsilon = 0$  求解,则得到此准静态问题的解为

$$u_c = \frac{Bi}{1 - Bi} \ln \frac{x}{S_c} \quad (41)$$

$$\tau_c = (1 - S_c^2) \left( \frac{1}{2Bi} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} S_c^2 \cdot \ln S_c \quad (42)$$

当两固液界相遇时

$$S_b = S_c = S_f, \tau_b = \tau_c = \tau_f \tag{43}$$

即 
$$S_f^2 \cdot \ln \frac{S_f}{\eta^*} - \frac{1}{2} S_f^2 + \frac{\eta^{*2}}{2} = (1 - S_f^2) \left( \frac{1}{2Bi} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} S_f^2 \cdot \ln S_f \tag{44}$$

式(44)为一超越方程,对其进行数值计算,即可求出  $S_f$  与  $\tau_f$ 。如果以  $\tau_f$  为纵坐标,  $S_f$  为横坐标,将  $S_f$  与  $\tau_f$  的关系表达在坐标轴上,如图6所示,就能发现同心圆环中两个固液界面的位置随时间变化的规律。斜率小于0的曲线表示从外壳壁向内的凝固,斜率大于0的曲线表示从金属蕊芯向外的凝固。外壳壁向内的凝固从  $S_c |_{\tau=0}$  处开始,金属蕊芯向外的凝固从  $S_b |_{\tau=\eta^*}$  处开始。两条固液界面变化的曲线相交时,标志着凝固过程已结束。图6是在  $Bi = 10, \epsilon = 0$  时分别取不同的  $\eta^*$  值画出来的。从图中可以看出,与纯圆柱体的凝固相比 ( $\eta^* = 0$ ),环形空腔的凝固速度明显加快,即使金属蕊芯的管径很小,效果也很显著。以  $\eta^* = 0.05$  为例,与不带金属蕊芯圆柱体内凝固相比,可节省近一半的时间,这样虽然损失了一点相变介质的容积,却大大提高了凝固速度和凝固效率。

上述现象可作如下解释:对于圆柱的凝固,随着凝固过程的进行,冷却管壁与流体介质之间形成了一个固体介质隔热层(冰层),严重阻碍了向外传热,致使圆柱体中心轴线附近的凝固耗时很长。而圆环空腔的凝固则是内、外同时进行的,有效避免了这一问题,从而大大提高了凝固效率。

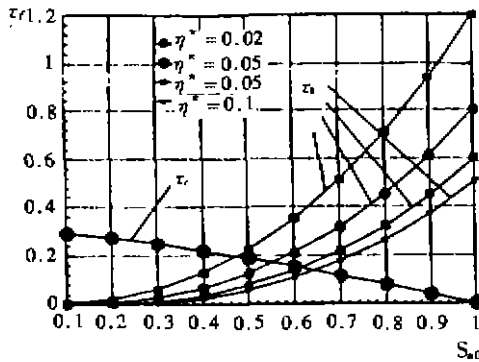


图6 凝固时间随内外管径比的变化曲线

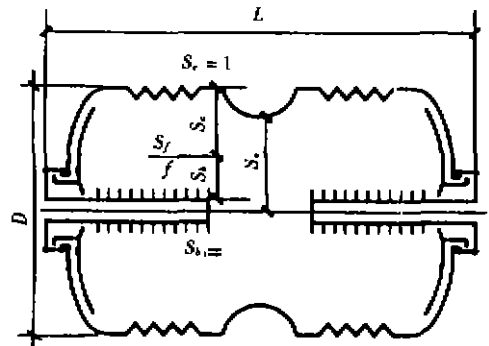


图7 双蕊芯冰球结构优化示意图

## 2 双蕊芯冰球的结构变化

通过上面的分析,我们已知道金属蕊芯所起的作用。由于金属蕊芯不可能横穿整个圆柱体的轴线,于是在圆柱体的中心点附近(无金属蕊芯部分)的凝固要比有金属蕊芯部分的凝固困难得多。为达到同时凝固的目的,圆柱体中心点必须内凹,内凹的无量纲尺寸由下列方程确定,即:

$$\begin{cases} (1 - S_f^2) \left( \frac{1}{2Bi} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} S_f^2 = S_f^2 \cdot \ln \frac{S_f}{\eta^*} - \frac{1}{2} S_f^2 + \frac{\eta^{*2}}{2} \\ S_b = 1 - S_f \end{cases} \tag{45}$$

一旦外部换热条件一定,对应不同的  $\eta^*$  值,存在一系列满足上述方程的这种蕊芯冰球的模型尺寸( $\eta^*$ 、 $S_f$ 、 $S_e$ )值,从中选取一组使相变介质容积最大的模型尺寸,作为这种蕊芯冰球的最佳尺寸,从而使该冰球结构最优。

### 3 结 论

1) 采用双金属蕊芯形成环形空腔,内外同时凝固,与纯圆柱体相比较,缩短了凝固时间,可大大提高凝固效率。

2) 当蓄冷相变材料的  $S_e$  值小于 0.1 时,可直接运用准静态方法求解相变热传导问题,这样可避免很复杂的计算。

3)  $Bi$  数小于 10 时,对凝固过程有一定的影响。超过此值后,影响逐渐减弱。当  $Bi$  数大于 10 以后,对凝固过程几乎不起作用,这说明单纯改变外部换热条件是有限的。当外部对流换热系数达到某一数值后,不但不能加强热量的交换,反而增加了冷媒流动的阻力。

4) 对双蕊芯冰球结构进行优化设计时,应选择适当的  $\eta^*$  值,使得该冰球内的相变介质容积最大而冷媒系统流动阻力最小。

#### 参 考 文 献

- 1 R. R. Stewart. Ice Formation Rate for a Thermal Storage System. ASHRAE Trans. 1989 Part III 3348 - 3353
- 2 S. C. Silver. Component Models for Computer Simulation of Ice storage System. ASHRAE Trans 1989 Part I 1214 - 1226.
- 3 杨冠雄. 储冷式空调系统分析. 1991. 1
- 4 赵庆珠, 蒋久秩. 冰球蓄冷过程的传热研究. 1994 年全国暖通空调制冷年会论文集. 1994. 10

## Study on Heat Conductivity and Design Optimization of Double-wicked Capsule

Zhang Lijun Tian Shenyuan

(Faculty of Urban Construction Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045)

**Abstract** A mathematical model of water undergoing solidification in a double-wicked capsule, which has a bright future and is being used all over China, is established. The perturbation technique is employed to solve this problem. The correlations of the entire solidification time with Ste-number and Bi-number are obtained. The effect of radii ratio  $\eta^*$  and Bi-number on the total period of solidification is also analyzed. Last of all, design optimization of this capsule is also discussed in this paper.

**Key Words** double-wicked capsule, perturbation method, boundary condition, solidification

(编辑:王秀玲)