不等端弯矩作用下等效弯矩系数的讨论

④ 19-23

崔 佳 徐小军 李开禧
(重庆建筑大学建筑工程学院 400045)

TU323.04

摘 要 现行设计规范对梁柱在不等端弯矩作用下等效弯矩系数 β 的取值因采用了近似表达式的形式,故与实际情况有较大误差。同时,由于现行设计方法不能提供二阶最大弯矩的准确位置,也给设计带来了不便。本文运用弯矩分布函数,建议对 β 的取值可以采用图表的方法,使 β 值的求解更精确、更实用。同时,在此基础上,还提出了等效跨长的概念。

关键词 不等端弯矩,等效弯矩系数,弯矩分布函数,等效跨长
中图法分类号 TU392.1

梁.柱,设计

概 述

现行各国规范中,对非均匀弯矩作用下梁柱杆件的设计,常采用将其等效为等端弯矩作用的简化设计方法,即在杆端弯矩已知的情况下,其二阶最大弯矩的取值为在杆端弯矩前乘以弯矩放大系数 η,这里

$$\eta = \frac{\beta}{1-\frac{P}{P_E}} \tag{1}$$

式中,P 为杆件所承受的轴力,P_E 为欧拉临界力,而 β 为等效弯矩系数。对于不等端弯矩作用下等效弯矩系数 β 的取值,现各国设计规范一般采用 Austin[1] 的简化计算式,即:

$$\beta = 0.6 + 0.4\frac{M_2}{M_1} \qquad 且\ \beta \geqslant 0.4 \tag{2}$$

我国现行《钢结构设计规范》(GBJ17-88)取 $\beta = 0.65 + 0.35\,M_2/M_1$,同时限制 β 不小于 0.4[2],实际上也是由上式借鉴而来。

这种取值方法的优点是公式简单,易为工程设计人员所掌握,但由于公式(2)是一个近似表达式,故也存在在某些情况下与实际内力分布误差较大的缺点。近期研究工作已经发现,等效弯矩系数 β 与杆件两端弯矩的比值 $\alpha = M_2/M_1$ 的函数关系事实上有一个很宽的分布带,具有相当的离散性。如果 β 按(2)式取值,则在 $\alpha > 0$ 的区域是偏于不安全的;而在 α 接近于 -1 时,又过于保守(见图4)。同时,采用上述算法的另一个重大缺陷还在于,现行设计表达式无法给出工程设计人员所关心的二阶最大弯矩所在的截面位置,从而影响到杆件截面的准确设计。为了解决上述矛盾,本文通过对弯矩分布函数表达式的分析,提出处理此问

收稿日期:1997-09-18
崔 佳.女,1953年生,副教授

题的简便设计方法。由于其最后结果只是工程师们所熟悉的正割公式的推广，所以并不难为工程界所掌握。

1 弯矩分布函数的推导

图 1a 为一压弯杆件且仅有一端有端弯矩 M_0 作用时的计算简图。在图示力系作用下，其任意截面的内外弯矩平衡方程为(图 1b)：

$$-EIy'' - Py - V(L-x) = 0 \tag{3}$$

上式求导两次得：

$$(-EIy'')'' + \frac{P}{EI}(-EIy'') = 0 \tag{4}$$

或

$$M'' + k^2 M = 0 \tag{5}$$

(5)式中 $k^2 = P/EI$，其通解为：

$$M = A\sin k(L-x) + B\cos k(L-x)$$

由杆件两端的边界条件，可解出待定常数 $A = M_0/\sin kL$，$B = 0$，即

$$M = M_0 \frac{\sin k(L-x)}{\sin kL} \tag{6}$$

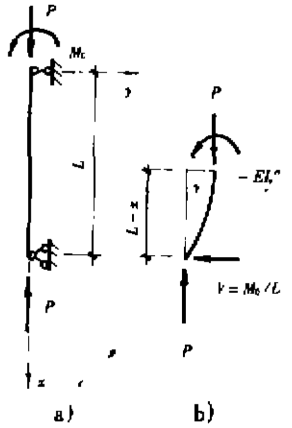

图 1 杆件一端有端弯矩作用时的计算简图

图 2 为当杆件两端分别作用弯矩 M_1 和 M_2 时的计算简图，其弯矩分布图应为 M_1 和 M_2 单独作用时的叠加。这时 x 必须采用统一的坐标，为了推导的方便，将坐标原点定在 M_1 作用一端(图 2)。

若只有 M_1 单独作用，根据前面的推导，弯矩分布函数应为：

$$M = M_1 \frac{\sin k(L-x)}{\sin kL} \tag{7}$$

同理，当只有 M_2 单独作用时，弯矩分布函数应为：

$$M = M_2 \frac{\sin kx}{\sin kL} \tag{8}$$

当 M_1 和 M 同时作用时，弯矩分布函数应为(7)、(8)两式的叠加，即

$$M = \frac{\sin k(L-x) + M_2 \sin kx}{\sin kL} \tag{9}$$

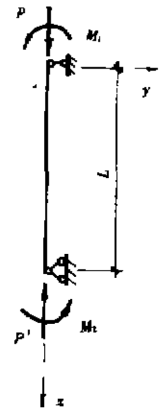

图 2 杆件两端有端弯矩作用时的计算简图

2 二阶最大弯矩的求解

利用上节所推导的弯矩分布函数，可以很方便地推出求解二阶最大弯矩 M_{max} 的函数表达式。

设杆件两端分别作用弯矩 M_1 和 M_2(如图 2 所示)，且 $|M_1| \geq |M_2|$，$M_2/M_1 = \alpha$。其中，

M_1 和 M_2 的取值规则为，当使构件产生同向曲率（即无反弯点）时取同号；使构件产生反向曲率（即有反弯点）时取异号。

由上节的推导知，距杆端为 x 处的截面弯矩为：

$$M=\frac{M_1\left[\sin k(L-x)+\alpha\sin kx\right]}{\sin kL} \tag{10}$$

当 $M=M_{max}$ 时，有 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=0$，对上式求导并令其等于零，解得

$$\alpha=\frac{\cos k(L-x)}{\cos kx} \tag{11}$$

若已知 α、k，即可解出对应于最大弯矩 M_{max} 所在截面的坐标 x_m，此时，上式成为

$$\alpha=\frac{\cos k(L-x_m)}{\cos kx_m} \tag{12}$$

由(12)式解出 x_m 并代入(9)式，即可得到 M_{max} 的表达式：

$$M_{max}=\frac{M_1\left[\sin k(L-x_m)+\alpha\sin kx_m\right]}{\sin kL} \tag{13}$$

将(12)式代入上式，整理后得

$$M_{max}=\frac{M_1}{\cos kx_m} \tag{14}$$

通常情况下，由一阶分析可以得到 α 及 k 值，要求解杆件的最大弯矩，必须首先由(12)式解出 x_m，再代入(14)式求解 M_{max}。由于(12)式是一个超越方程，x_m 的求解往往只能借助于数值解，而很难找到解析解，这就给设计带来了不便。为了回避求解超越方程的困难，作者建议可将这一求解过程转换成图表的形式来解决。

由于 x_m/L 必定位于 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 之间，因而可取 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 之间的一组 x_m/L 值，作 α 与 k 的关系图，得到一簇曲线，如图 3 所示。应用时，由已知 α、k 可在图中定出对应的一点。这一点若位于这簇曲线所包围的面积之外，则取 $x_m=0$，它意味着二阶最大弯矩 M_{max} 即为端弯矩 M_1；这一点若位于曲线簇所包围的面积之内的某一条曲线上，x_m 即为该条曲线所代表的 x_m 值；这一点若介于两条曲线之间，则可在相邻两条曲线的 x_m 值之间进行插值。求得的 x_m，即为最大弯矩所在的截面位置，代入(14)式，即可得出 M_{max}。

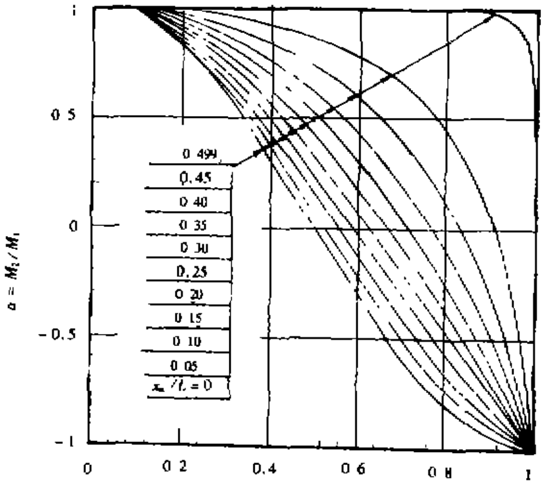

图 3　$\alpha-k$ 关系曲线图

3　与现行规范的比较

如前所述，对于非均匀弯矩作用的压弯杆件，现行设计方法系通过引进等效弯矩系数

β 把不等端弯矩作用化为等效的均匀弯矩作用,从而求出其最大弯矩设计值。

依照现行设计方法,在不等端弯矩作用下,压弯构件跨内最大弯矩的取值为:

$$M_{max} = \frac{\beta M_1}{\left(1 - \frac{P}{P_E}\right)} \tag{15}$$

式中,β 为弯矩修正系数。按照第二节的推导,杆件截面最大弯矩的精确表达式应为:

$$M_{max} = \frac{M_1}{\cos k\, x_m} \tag{14}$$

比较(14)、(15)两式,由于两式等价,故有

$$\beta = \frac{1 - \frac{P}{P_E}}{\cos k\, x_m} \tag{16}$$

若取 P/P_E 为[0.1]之间的一个定值,则 β 仅为坐标 x_m 的函数。由第二节的推导,曾得出两端弯矩的比值 α 亦为 x_m 的函数,因此,若取 P/P_E 为 0.1 到 1 之间的一组定值,则可得到 β 与 α 的一簇关系曲线如图 4 所示。

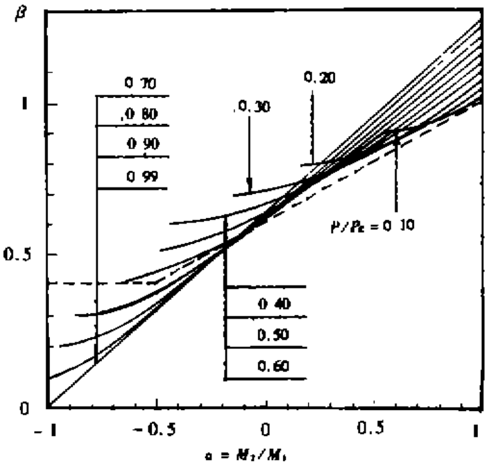

图 4 $\beta-\alpha$ 关系曲线图

分析图 4 由线的变化规律,可以发现:

1) 图中所绘出的 10 条曲线在 α 取 -1 至 1 区间基本上都不是贯通的完整曲线,而是存在折断点,这是由参数 x_m 的取值范围所决定的。每条曲线的端点(即 α 取最小值所对应的点)很容易得出,只要对(12)式求导,得出 $d\alpha/dx_m \geq 0$,表明曲线端点的 α_{min} 值为 x_m 取 0 时所对应的值,即

$$\alpha_{min} = \cos kL = \cos\left(\pi\sqrt{\frac{P}{P_E}}\right) \tag{17}$$

2) β 与 α 的关系图呈一较宽的分布带,很显然,现行规范所取 β 曲线(在图中用虚线表示)与杆件实际的 β 值存在较大的误差。在 $\alpha > 0$ 的区域是偏于不安全的,特别是在 α 接近于 1 时,β 值被低估了约 20%。而在 α 接近于 -1 时,取 β 值等于 0.4,显然又过于保守。如果采用第二节所建议的方法,则可以保证计算弯矩的精确度。

4 关于等效跨长 $2x_m$

采用等效弯矩系数法进行设计的另一最大缺点是,二阶最大弯矩 M_{max} 在杆件中的位置随 α、k 的变化规律没有得到反应,因而存在弯矩值沿杆长分布不够直观,力学含义不够清晰的缺点。本文建议的实用设计方法则可以弥补这一不足。

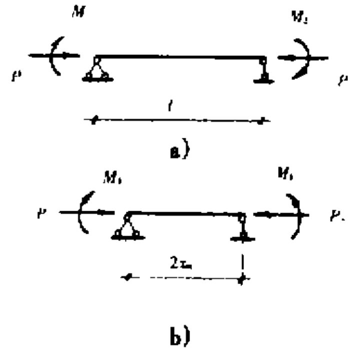

图 5 杆件的等效跨长

将 $x=2x_m$ 代入弯矩分布函数表达式(9)，经计算并整理后可以得出，$M=M_1$，它意味着，如图 5(a)所示跨长为 L，承受不等端弯矩作用的梁柱，与图 5(b)所示跨长为 $2x_m$。两端作用均匀弯矩 M_1 的梁柱，其二阶最大弯矩是相等的，即是说，这两种杆件的力学模型是等效的，因而可以称 $2x_m$ 为原杆件的等效跨长。

利用等效跨长的概念亦可以进行不等端弯矩作用下压弯杆件的设计，只要按图 3 所示方法求得 x_m 值，则可以图 5(b) 所示杆件模型代替原设计杆件，按均匀弯矩作用下的杆件进行设计，也是很方便的。

5 结　论

以上对不等端弯矩作用下压弯构件的讨论表明，现行设计方法由于采用了近似表达式的形式，对二阶最大弯矩的求解存在较大的误差，同时亦不能给出最大弯矩在杆件截面中的准确位置。若采用本文建议的方法，则不但数据完整、精确，而且概念清晰。由于二阶弯矩表达式只是正割公式的推广，而正割公式正是为工程界所熟悉的，故使用起来也十分方便。

参 考 文 献

1 Austin, W. J. Strength and design of metal beam - Columns. Proc. ASCE, J. Struct Div 1961, 87(4)
2 钢结构设计规范(GBJ 17-88). 北京：中国计划出版社，1988
3 李开禧，魏明钟．钢构件稳定．成都：四川科学技术出版社，1987
4 陈绍蕃．钢结构设计原理．北京：科学出版社，1987

A Discussion on the Factor of Equivalent Bending Moment for Beam - Columns under the Action of Moment Gradient

Cui Jia　Xu Xiaojun　Li Kaixi
(Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University 400045)

Abstract　According to Code for Design of Steel Structures GBJ17 - 88, for beam - columns under the action of moment gradient, the value of factor of equivalent moment β will be calculated by an approximate equation. In some cases, the value is not always correct. At the same time, this method can't get the accurate section of second - order maximum moment. In this paper, a method is proposed for calculating the value of β. That is to use a distribution function of moment to make a schedule. Using this schedule, the value of β will be more accurate and more useful. Based on this condition, a concept of equivalent span length is proposed.

Key Words　moment gradient, factor of equivalent moment, distribution function of moment, equivalent span length

(编辑：王秀玲)