一类广义 Liénard 系统的中心

36-43　　O175.12

杨启贵　　周焯华
(广西师范大学)　(重庆建筑大学基础科学系 400045)

摘 要 本文研究广义 Liénard 系统

$\ddot{x}+[f(x)+k(x)\dot{x}]\dot{x}+g(x)=0$ 的中心问题，得到此系统具有局部中心的三个判据和具有全局中心的一个充要条件。

关键词 广义 Liénard 系统，中心，充要条件

中图法分类号 O175.12　liénard 系统

1 引　理

关于广义 Liénard 系统

$$\ddot{x}+[f(x)+k(x)\dot{x}]\dot{x}+g(x)=0 \tag{1}$$

的讨论，最近引起极大的兴趣[1-4]。文[1]通过变换将系统(1)转化为 Gause 型捕食系统，给出了(1)周期解存在唯一的条件，而[2]则通过选择正定函数方法建立了系统(1)的振动性和周期解的存在性判据。然而，对于系统(1)的中心问题探讨却很少。本文的目的就是通过巧妙的变换，将系统(1)转化成 Liénard 系统，利用 Liénard 系统已有的结果，获得了系统(1)具有局部中心的个充分性定理和具有全局中心的一个充要条件，推广和改进了[5-7]的工作，且本文所给的方法可以进一步研究系统(1)的定性行为。

未特别指出，本文的函数均连续，且保证系统解唯一，并称系统(1)的$(x,\dot{x})=(0,0)$为原点。为了建立系统(1)的局部中心和全局中心的结果，我们选取[6,7]的已知结论建立如下引理。

本节记　$\tilde{F}(x)=\int_0^x\tilde{f}(x)\,ds$，　$\tilde{G}(x)=\int_0^x\tilde{g}(s)ds$

引理 1　[定理 2.1，定理 2.2]考虑系统

$$\dot{x}=y\qquad \dot{y}=-\tilde{f}(x)y-\tilde{g}(x) \tag{2}$$

设 ① $\tilde{F}(x)$，$\tilde{g}(x)$均为奇函数，$\tilde{g}(x)>0$　　当 $x>0$

② 下列条件之一满足

1° ∃连续可微函数 $r(x)$，$r(0)=0$，$k>0$使得当 $0<x<a$ 时有

1) $r'(x)\geq 0\ (\neq 0)$；$|\tilde{F}(x)|\leq kr(x)$

收稿日期：1996-12-20

杨启贵，男，1965年生，讲师

2) $r'(x)\ g(x)\geq r(x)[\ |\tilde{F}(x)|\ +\varepsilon r'(x)]^2/4,\ \varepsilon>0$

2° $\exists K_1>0>K_2, a>0$ 使得

$$K_2\leq\frac{\tilde{F}(x)}{\tilde{G}(x)}\leq K_1$$，当 $0<x<a$ 时，则系统(2)的原点是局部中心。

引理2 [6,定理3.1]考虑系统 $\dot{x}=y-\tilde{F}(x)\quad \dot{y}=-\tilde{g}(x)$ (3)

设 ① $\tilde{F}(-x)=\tilde{F}(x)$, $\tilde{g}(-x)=-\tilde{g}(x)$, $\tilde{g}(x)>0$ 当 $x>0$

② $\exists a>0$，连续函数 $r(x)$ 使得当 $0\leq x<a$ 时有

$$r(x)\geq|\tilde{F}(x)|>0,\ \frac{1}{r(x)}\int_0^x\frac{\tilde{g}(u)}{r(u)}du\geq\beta>\frac{1}{4}$$

则系统(3)的原点是局部中心。

若在引理1、2中 $\tilde{f}(x)$、$\tilde{g}(x)$ 不全是奇函数，则有如下引理。

引理3 [7,命题3.1]设系统(3)满足 $x\tilde{g}(x)>0$ 当 $x\neq0$ 时，$\tilde{G}(-\infty)=\tilde{G}(+\infty)$ 且

① $\exists K>0$ 使得当 $0\leq u<K$ 时有 $\tilde{F}[\tilde{G}^{-1}(-u)]=\tilde{F}[\tilde{G}^{-1}(u)]$

其中 $\tilde{G}^{-1}(u)$ 是 $u=\int_0^x|\tilde{g}(s)|ds$ 的逆函数

② 下列条件之一成立

1° $\exists$ 正数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ 及 $\tilde{F}(x_n)=0$

2° $\exists a>0,\beta>\frac{1}{4}$ 使当 $0<x\leq a$ 时有 $|\tilde{F}(x)|>0$ 及 $\frac{1}{\tilde{F}(x)}\int_0^x\frac{\tilde{g}(s)}{\tilde{F}(s)}ds\geq\beta$

③ $\tilde{F}[\tilde{G}^{-1}(-u)]$ 在 $u=0$ 的某邻域为连续可微则系统(3)的原点是局部中心。

引理4 [7,定理3.1]设原点是系统(3)的局部中心，且

① $\tilde{G}(-\infty)=\tilde{G}(+\infty)$, $x\tilde{g}(x)>0$ 当 $x\neq0$ 时

② $\tilde{F}[\tilde{G}^{-1}(-u)]=\tilde{F}[\tilde{G}^{-1}(u)]$，其中 $\tilde{G}^{-1}(u)$ 是 $u=\int_0^x|\tilde{g}(s)|ds$ 的逆函数

③ 下列条件之一满足

1° $\limsup\limits_{x\to+\infty}\tilde{F}(x)>-\infty$

2° $\exists N>0,\beta>\frac{1}{4}$ 使得当 $x\geq N$ 时 $\tilde{F}(x)<0$，且对任意 $b\geq N$，$\exists\bar{b}>b$ 有

$$\int_0^x\frac{\tilde{g}(s)}{\tilde{F}(s)}ds\leq\beta\tilde{F}(s)$$，当 $x\geq\bar{b}$ 时

④ 下列条件之一成立

1° $\liminf\limits_{x\to+\infty}\tilde{F}(x)<+\infty$

2° $\exists N>0,\beta>\frac{1}{4}$ 使得当 $x\geq N$ 时$\tilde{F}(x)>0$,且对任意 $b\geq N$, $\exists\tilde{b}>b$ 有

$$\int_0^x\frac{\tilde{g}(s)}{F(s)}ds\geq\beta\tilde{F}(x),\ 当\ x\geq\tilde{b}\ 时$$

则系统(3)的原点是全局中心当且仅当

$$(C_1')\quad \limsup_{x\to+\infty}\left[\tilde{F}(x)+\int_0^x\frac{\tilde{g}(s)}{1+\tilde{F}_-(s)}ds\right]=+\infty$$

$$(C_2')\quad \limsup_{x\to+\infty}\left[-\tilde{F}(x)+\int_0^x\frac{\tilde{g}(s)}{1+\tilde{F}_+(s)}ds\right]=+\infty$$

引理5 设原点是系统(2)或(3)的全局中心,则当 $x\neq0$ 时,$x\tilde{g}(x)>0$。

证 只需证系统(3)成立即可,由(3)与(2)等价,从系统(3)成立,即可得系统(2)也满足。

先证 当 $x\neq0$ 时,$\tilde{g}(x)\neq0$。否则,若 $\exists x_0\neq0$ 使得 $g(x_0)=0$,于是$[x_0,\tilde{F}(x_0)]$也是(3)的解,这与原点为全局中心矛盾。

下证当 $x\neq0$ 时 $x\tilde{g}(x)>0$。否则 $\exists x_1$ 使得$\tilde{g}(x_1)<0$,若 $\exists$ 另一点 $x_2>0$ 使得$\tilde{g}(x_2)>0$,则 $\exists x^*\neq0$ 使得$\tilde{g}(x^*)=0$,与前述$\tilde{g}(x)\neq0$ 矛盾。从而 $x_1\tilde{g}(x_1)<0$ 只能为下列三种情形之一:

a) $x\tilde{g}(x)<0$,当 $x\neq0$ 时

b) $\tilde{g}(x)<0$,当 $x\neq0$ 时

c) $\tilde{g}(x)>0$,当 $x\neq0$ 时

若a)成立。设$[x(t),y(t)]$是系统(3)满足初值$(x_0,y_0)=[x(t_0),y(t_0)]$,其中 $x_0>0$,$y_0>F(x_0)$,再记 T^+是从点(x_0,y_0)出发的正半轨线,则T_0^+ 在任一点都不能在曲线 $y=\tilde{F}(x)$ 的下方。事实上,假若T_0^+ 在某点与 $y=\tilde{F}(x)$相交,即$(x^*,y^*)=[x(t^*),y(t^*)]$,这里 $t^*>t_0$,由(3)得 $x^*>x_0$ 且

$$\frac{dx(t^*)}{dt}=y^*-F(x^*)=0\quad \frac{dy(t^*)}{dt}=-g(x^*)>0$$

由此得T_0^+ 在点(x^*,y^*)的方向垂直向上,因而T_0^+ 不能穿过 $y=\tilde{F}(x)$,所以T_0^+ 不能在 $y=F(x)$的下方。即有 $y(t)-\tilde{F}[x(t)]\geq0$,再由系统(3)得 $t\geq t_0$ 有$\frac{dx(t)}{dt}=y(t)-F[x(t)]\geq0$,明显 $x(t)\geq x(t_0)$,这与原点是全局中心矛盾。

若b)成立。考虑满足初值 $y(t_0)=y_0>0$ 的(3)的解$[x(t),y(t)]$,由b)及(3)知:$\frac{dy(t)}{dt}=-g[x(t)]\geq0$,当 $t\geq t_0$ 时,有 $y(t)\geq y(t_0)=y_0$,这与全局中心矛盾。类似讨论c)也

不成立。从而引理 5 得证。

2　结　果

定理 1　设系统(1)满足

① $f(-x)=-f(x)e^{\int_{-x}^{x}k(s)\mathrm{d}s}$，$g(-x)=-g(x)e^{2\int_{-x}^{x}k(s)\mathrm{d}s}$，$g(x)>0$ 当 $x>0$ 时

② 下列条件之一成立

1° $\exists$ 连续可微函数 $r(x)$，$r(0)=0$，$K>0$ 使得当 $0<x<a$ 时有

1) $r'(x)\geqslant 0\ (\not\equiv 0)$；$\left|\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right|\leqslant kr(x)$

2) $r'(x)\,g(x)\geqslant r(x)[\,|f(x)|+\varepsilon r'(x)e^{-\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}]^2/4,\ \varepsilon>0$

2° $\exists K_1>0>K_2$，$a>0$ 使得

$$K_2\leqslant\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\Big/\int_0^x g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\leqslant K$$

则系统(1)的原点是局部中心。

证　作变换

$$y=\dot{x}e^{\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}\quad \mathrm{d}\tau=e^{-\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}\tag{4}$$

仍以 t 记 τ，则系统(1)可转化为等价系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(x)e^{\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}y-g(x)e^{2\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}\tag{5}$$

现验证在定理条件下，系统(5)满足引理 1 条件

① $\tilde{f}(-x)=f(-x)e^{\int_0^{-x}k(s)\mathrm{d}s}=-f(x)e^{\int_{-x}^{x}k(s)\mathrm{d}s}e^{\int_0^{-x}k(s)\mathrm{d}s}$

$=-f(x)e^{\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}=-\tilde{f}(x)$

$\tilde{g}(-x)=g(-x)e^{2\int_0^{-x}k(s)\mathrm{d}s}=-g(x)e^{2\int_{-x}^{x}k(s)\mathrm{d}s}e^{2\int_0^{-x}k(s)\mathrm{d}s}$

$=-g(x)e^{2\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}=-\tilde{g}(x)$

当 $x>0$ 时，$\tilde{g}(x)=g(x)e^{2\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}>0$

② 下列条件之一满足

1° $\exists$ 连续可微函数 $r(x)$，$r(0)=0$，$K>0$，使得当 $0<x<a$ 时有

1) $r'(x)\geqslant 0\ (\not\equiv 0)$；$|\tilde{F}(x)|=\left|\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right|\leqslant kr(x)$

2) $r'(x)\,\tilde{g}(x)=r'(x)g(x)e^{2\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}$

$\geqslant\dfrac{r(x)}{4}[\,|f(x)|+\varepsilon r'(x)e^{-\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}]^2\cdot e^{2\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}$

$=r(x)[\,|f(x)e^{\int_0^x k(s)\mathrm{d}s}|+\varepsilon r'(x)]^2/4$

$=r(x)[\,|\tilde{f}(x)|+\varepsilon r'(x)]^2/4,\quad \varepsilon>0$

2° $\exists K_1>0>K_2$，$a>0$ 使得

$$K_2 \leqslant \frac{\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds}{\int_0^x g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}ds} = \frac{F(x)}{G(x)} \leqslant K_1$$

故由引理 1 知系统(5)从而(1)的原点是局部中心。

定理 2 设系统(1)满足

① $\int_{-x}^{x} f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds = 0$, $g(-x) = -g(x)e^{2\int_{-x}^{x} k(s)ds}$, $g(x) > 0$ 当 $x > 0$ 时

② $\exists a > 0$,连续函数 $r(x)$使得当 $0 < x < a$ 时有 $r(x) \geqslant \left| \int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds \right| > 0$

$$\frac{1}{r(x)} \int_0^x \frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{r(s)} ds \geqslant \beta > \frac{1}{4}$$

则系统(1)的原点是局部中心。

证 作变换

$$y = \dot{x}e^{\int_0^t k(s)ds} + \int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds \quad dt' = e^{-\int_0^x k(\tau)d\tau}dt \tag{6}$$

仍以 t 记t',则系统(1)等价于

$$\frac{dx}{dt} = y - \int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds \quad \frac{dy}{dt} = -g(x)e^{2\int_0^x k(s)ds} \tag{7}$$

现验系统(7)满足引理 2 条件,事实上

① $\tilde{F}(-x) = \int_0^{-x} f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds + \int_{-x}^{x} f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds$

$$= \int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds = \tilde{F}(x)$$

$$\tilde{g}(-x) = g(-x)e^{2\int_0^{-x} k(s)ds} = -g(x)e^{2\int_{-x}^{x} k(s)ds} \cdot e^{2\int_0^{-x} k(s)ds}$$

$$= -g(x)e^{2\int_0^x k(s)ds} = -\tilde{g}(x)$$

当 $x = 0$ 时,$\tilde{g}(x) = g(x)e^{2\int_0^x k(s)ds} > 0$

② $\exists a > 0$,连续函数 $r(x)$使得当 $0 < x < a$ 时有

$$r(x) \geqslant \left| \int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds \right| = |\tilde{F}(x)| > 0$$

$$\frac{1}{r(x)} \int_0^x \frac{g(u)}{r(u)} e^{2\int_0^u k(s)ds} du = \frac{1}{r(x)} \int_0^x \frac{\tilde{g}(u)}{r(u)} du \geqslant \beta > \frac{1}{4}$$

根据引理 2 知系统(7)从而(1)的原点是局部中心。

定理 3 设系统(1)满足

① $xg(x) > 0$ 当 $x \neq 0$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}ds = 0$$

② $\exists K > 0$,使得当 $0 \leqslant u < k$ 时有

$$\int_{G^{-1}(-u)}^{G^{-1}(u)} f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds = 0$$

其中 $G^{-1}(u)$是 $u=\int_0^x |g(s)| e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}ds$ 的逆函数。

③　下列条件之一成立

1°　$\exists$ 正数列$\{x_n\}$使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ 及 $\int_0^{x_n} f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds=0$

2°　$\exists\alpha>0$，使当 $0<x\leqslant\alpha$ 时有

$$\left|\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds\right|>0$$

$$\left[\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds\right]^{-1}\int_0^x \frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{\int_0^s f(u)e^{\int_0^u k(\tau)d\tau}du}ds\geqslant\beta>\frac{1}{4}$$

则系统(1)的原点是局部中心。

证　由定理 2 证知，系统(1)在变换(6)之下转化为等价系统(7)，同定理 2 证一样可检验得在此定理条件下引理 3 满足，所以系统(7)从而(1)的原点是局部中心。

下面给出系统(1)具有全局中心的充要条件。

定理 5　设原点是(1)的局部中心，且

①　$\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}ds=0$

②　$\int_{G^{-1}(-u)}^{G^{-1}(u)} f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds=0$，其中 $G^{-1}(u)$是 $u=\int_0^x |g(s)| e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}ds$ 的逆函数。

③　下列条件之一成立

1°　$\limsup\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds>-\infty$

2°　$\exists N>0,\beta>\frac{1}{4}$ 使得当 $x\geqslant N$ 时有 $\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds<0$，且对任意 $b\geqslant N$，$\exists\bar{b}>b$，

当 $x\geqslant\bar{b}$ 时满足

$$\int_b^x \frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{\int_0^s f(u)e^{\int_0^u k(\tau)d\tau}du}ds\leqslant\beta\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds$$

④　下列条件之一成立

1°　$\liminf\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds<+\infty$

2°　$\exists N>0,\beta>\frac{1}{4}$ 使得当 $x\geqslant N$ 时有 $\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds>0$，且对任意 $b\geqslant N$，$\exists\bar{b}>b$，

当 $x\geqslant\bar{b}$ 时满足

$$\int_b^x \frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{\int_0^s f(u)e^{\int_0^u k(\tau)d\tau}du}ds\geqslant\beta\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds$$

则系统(1)的原点是全局中心当且仅当

a)　$xg(x)>0$，当 $x\neq0$ 时

b)　$\limsup\limits_{x\to+\infty}\left[\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds+\int_0^x \frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{1+F_-(s)}ds\right]=+\infty$

c) $\limsup\limits_{x\to+\infty}\left[-\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds+\int_0^x\frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{1+F_+(s)}ds\right]=+\infty$

其中$F_\pm(x)=\max\left[0,\pm\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds\right]$

证　充分性作变换(6),则系统(1)转化为等价系统(7),现验证定理条件下满足引理5

① $\tilde G(-\infty)=\int_0^{-\infty}g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}ds+\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}ds$

$$=\int_0^{+\infty}g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}ds=\tilde G(+\infty)$$

② $\tilde F[\tilde G^{-1}(-u)]=\int_0^{G^{-1}(-u)}f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds+\int_{G^{-1}(-u)}^{G^{-1}(u)}f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds$

$$=\int_0^{G^{-1}(u)}f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds=\tilde F(\tilde G^{-1}(u))$$

③ 下列条件之一成立

1° $\limsup\limits_{x\to+\infty}\tilde F(x)=\limsup\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds>-\infty$

2° $\exists N>0,\beta>\frac{1}{4}$ 使得当 $x\geqslant N$ 时,$\tilde F(x)=\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds<0$,且对任意 $b\geqslant N$,

$\exists\tilde b>b$,当 $x\geqslant\tilde b$ 时满足

$$\int_b^x\frac{\tilde g(s)}{\tilde F(s)}ds=\int_b^x\frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{\int_0^s f(u)e^{\int_0^u k(\tau)d\tau}du}ds\leqslant\beta\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds=\beta\tilde F(x)$$

④ 下列条件之一满足

1° $\liminf\limits_{x\to+\infty}\tilde F(x)=\liminf\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds<+\infty$

2° $\exists N>0,\beta>\frac{1}{4}$ 使得当 $x\geqslant N$ 时,$\tilde F(x)=\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds>0$,且对任意 $b\geqslant N$,

$\exists\tilde b>b$,当 $x\geqslant\tilde b$ 时满足

$$\int_b^x\frac{\tilde g(s)}{\tilde F(s)}ds=\int_b^x\frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{\int_0^s f(u)e^{\int_0^u k(\tau)d\tau}du}ds\leqslant\beta\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds=\beta\tilde F(x)$$

(C_1') $\limsup\limits_{x\to+\infty}\left[\tilde F(x)+\int_0^x\frac{\tilde g(s)}{1+\tilde F_-(s)}ds\right]$

$$=\limsup\limits_{x\to+\infty}\left[\int_0^x f(s)e^{\int_0^s k(\tau)d\tau}ds+\int_0^x\frac{g(s)e^{2\int_0^s k(\tau)d\tau}}{1+F_-(s)}ds\right]=+\infty$$

类似(C_2)也成立。

故根据引理4知系统(7)从而(1)原点是全局中心,

必要性　通过变换(6)将系统(1)转化成(7),由引理5知:$x\tilde g(x)=xg(x)e^{2\int_0^x k(\tau)d\tau}>0$ 当$x\neq0$时,故(a)成立,再由充分性与引理4得(b)、(c)。

注 1　当 $f(x)$、$g(x)$、$k(x)$ 均为奇函数，定理 5 条件①、②满足。特别(1)中 $K(x)\equiv 0$ 时，本文推广和改进了[5－7]的主要结果

例　设 $\lambda\in R$，在(1)中取 $K(x)=\dfrac{\lambda x}{1+x^2}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{8x\cos 4x^2}{(1+x^2)^{x}}, & x\geq 0\\[2ex] \dfrac{x\cos\dfrac{x^2}{2}}{(1+x^2)^{x}}, & x<0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{(1+x^2)^{2\lambda}}, & x\geq 0\\[2ex] \dfrac{x}{2(1+x^2)^{2\lambda}}, & x<0\end{cases}$$

时，易验证此时系统(1)满足定理 3、4 的条件，因而系统(1)的原点是局部中心，也为全局中心。

注 2　特别此例当 $\lambda=0$ 时，即 $K(x)\equiv 0$，$f(x)$、$g(x)$不是奇函数，故[5,6]不能判定。

参 考 文 献

1 Freedman H.I., Kuang Y., Uniqueness of limit cycles in Liénard-type.equations. Nonl. Anal., 1990, 15(4):333－338.

2 Guidorizzi H.L., Oscillating and periodic Solution of the type $\ddot{x}+f_1(x)\dot{x}+f_2(x)\dot{x}^2+g(x)=0$.J. Math. Anal. Appl., 1993, 176:11－23.

3 Qian C., Boundedness and aysmptotic behavior of solution of a second-order nonlinear system. Bull London Math. Soc., 1992, 24:281－288.

4 Qian Chuanxi, On global aysmptotic stability of second order nonlinear differential systems. Nonl. Anal., 1994, 22(7):823－833.

5 Yu Shuxiang, Zhang Jizhou, On the center of the Liénard equation. J. Diff. Eqs., 1993, 102:53－61.

6 Zhou Yurong, Wang Xiangrong, On the conditions of a center of the liénard equation. J. Math. Ainal. Appl., 1993, 180:43－59.

7 sugie J., The global center for the liénard system Nonl. Anal., 1991, 17(4):333－345.

8 Hara T., yoneyama T., On the global center of generalized liénard equation and its application to stability problem. Funkcial. Ekvac. 1985, 28:171－192

On the Center for a Class of Generalized Liénard System

Yang Qigui　　*Zhou Zhuohua*

(Guangxi Normal University 541001)　(Chongqing Jianzhu University 400045)

Abstract　In this paper, the problem of center of the generalized Liénard system(E): $\ddot{x}+[f(x)+k(x)\dot{x}]\dot{x}+g(x)=0$ is studied, three criteria which judge the origin for (E) to have a local center and a sufficient and necessary condition which guarantees the origin for(E) to have a global center are given.

Key Words　Generalized Liénard system, Center, Sufficient and necessary condition

(编辑：陈　蓉)