由Helmholtz方程Neumann外问题化归的各种边界积分方程的注记

O175.5

(8)
35-40,46

金朝嵩
(重庆建筑大学基础科学系 400045)

摘 要 对由Helmholtz方程Neumann外问题化归的各种边界积分方程进行了讨论。在用Helmholtz表达式导出这些积分方程的过程中，分析了其中一些方程当波数 k 是内问题的特征值时没有唯一解这一著名难题产生的原因，并提出了克服这一难题的方法，即给出了一个既与原边值问题等价、又对所有波数 k 都具有唯一解的直接边界积分方程。同时，分别对各种边界积分方程的优点及不足之处进行了评述。

关键词 位势、Helmholtz方程的边值问题、边界积分方程法
中图法分类号 O175.5

Helmholtz方程的Neumann外问题，是描述许多很有意义的物理、力学现象的很好的数学模型。例如声波或电磁波在坚硬表面的散射问题，就归结为这里讨论的边值问题。使用边界积分方程法(或称边界元法)来求本问题的数值解，现被公认是十分有效的。由本问题化归的边界积分方程有很多种，它们被分为两类：直接边界积分方程和间接边界积分方程。两类中又分别包含了第一类和第二类Fredholm边界积分方程。从不同的边界积分方程出发，用边界元法去求数值解，从数值分析及计算的效率角度看，会有不同的结果，以数学分析的角度看，它们是否与原问题等价，也有不同的答案。

人们熟知：当Helmholtz方程的波数 k 是内问题(Dirichlet问题或Neumann问题)的特征值时，由Helmholtz方程的Neumann外问题化归的间接积分方程，以及直接积分方程的第二类Fredholm方程，都没有唯一解。而外问题是没有特征值的，解应该唯一，这就发生了矛盾。这是一个著名的难题。为解决这个难题，人们做了很多工作[1][7]。笔者也为此目的开展了研究[3]，其主要思想是，将所讨论的外问题化归成直接边界积分方程的第一类Fredholm方程，并证明了它与原边值问题等价，在适当Sobolev空间中对所有波数 k 都存在唯一解，并能用数值方程求解。

由此可知，对由此外问题化归的各种边界积分方程进行仔细的分析，是很有意义的工作，这就是本文的目的。首先，对各种边界积分方程进行了分类。其次，通过由Helmholtz表达式导出各种边界积分方程，指出哪些边界积分方程与原边值问题不等价并分析了不等价的最本质的原因，也分析了文献[3]给出的方程得以解决上述著名难题的理由。与此同时，分别对使用各种边界积分方程求原问题数值解的优点及不足之处进行了比较和评述。

收稿日期:1997-06-06
金朝嵩，男，1943年生，教授

1 Helmholtz 表达式

设Ω是$1R^3$中有界开区域，Γ是其充分光滑的边界，Ω'是$\overline{\Omega}$的余集，r是$1R^3$中任意一点到原点的距离。设在Γ上任意一点y处的外法线向量为n_y，用n_y^+表示此法线在Ω'中的部分，用n_y^-表示此法线在Ω中的部分。定义

$$u^-(y)=\lim_{Y^-\to y}u(Y^-),\ Y^-\in\Omega,\ y\in\Gamma$$

$$u^+(y)=\lim_{Y^+\to y}u(Y^+),\ Y^+\in\Omega',\ y\in\Gamma$$

$$\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^-}=\lim_{Y^-\to y}\frac{\partial u(Y^-)}{\partial n_y},\ Y^-\in n_y^-,\ y\in\Gamma$$

$$\frac{\partial u(y)}{\partial n_y^+}=\lim_{Y^+\to y}\frac{\partial u(Y^+)}{\partial n_y},\ Y^+\in n_y^+,\ y\in\Gamma$$

考虑 Helmholtz 方程 Neumann 外问题，即求函数u，使得

$$\begin{cases}\Delta u+k^2u=0,\text{在}\Omega\text{中}, & (1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n^+}=g, \quad \text{在}\Gamma\text{上}, & (2)\\ \lim\limits_{r\to\infty} r\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0 & (3)\end{cases}$$

其中g是已知函数，k可取任意复数，被称为波数，条件(3)被称为辐射条件。

熟知：函数

$$E(x,y):=\frac{-1}{2\pi|x-y|}e^{ik|x-y|} \tag{4}$$

是 Helmholtz 方程满足辐射条件(3)的基本解。据此，在任意一点$y\in 1R^3$处，可在Γ上定义充分光滑的密度函数ρ的单层位势：

$$(S\rho)(y):=\int_\Gamma\rho(x)E(x,y)d_0x \tag{5}$$

以及充分光滑的密度函数μ的双层位势：

$$(D\mu)(y):=\int_\Gamma\mu(x)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)d_0x \tag{6}$$

其中，d_0x表示Γ上点x处的面积元。

单层位势和双层位势具有如下性质[4]：

$$\frac{\partial}{\partial n_y^\pm}(S\rho)(y)=\pm\rho(y)+\int_\Gamma\rho(x)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)d_0x,\ y\in\Gamma \tag{7}$$

$$(D\mu)^\pm(y)=\mp\mu(y)+\int_\Gamma\mu(x)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)d_0x,\ y\in\Gamma \tag{8}$$

而在任意一点$y\in 1R^3$处，单层位势，以及双层位势的法向导函数，都是连续的。

设$u\in C^\infty(\Omega)$是 Helmholtz 方程的解，在Ω上使用 Green 第二公式，可得：

$$(D\,u^-)(y)-\left(S\,\frac{\partial u}{\partial n^-}\right)(y)=\begin{cases}2u(y),\ y\in\Omega,\\ u^-(y),\ y\in\Gamma,\\ 0,\quad y\in\Omega'\end{cases} \tag{9}$$

同样，设 $u \in C^{\infty}(\Omega')$ 是 Helmholtz 方程的解且满足辐射条件 (3)，在Ω'上使用 Green 第二公式可得：

$$\left(S\frac{\partial u}{\partial n^{+}}\right)(y)-(D\,u^{+})(y)=\begin{cases}0, & y\in\Omega,\\ u^{+}(y), & y\in\Gamma,\\ 2u(y), & y\in\Omega'\end{cases} \tag{10}$$

将(9)式与(10)式相加，可得：

$$-(Sp)(y)+(Dq)(y)=\begin{cases}2u(y), & y\in \mathbb{R}^{3}-\Gamma\\ u^{-}(y)+u^{+}(y), & y\in\Gamma\end{cases} \tag{11}$$

其中，$p:=\frac{\partial u}{\partial n^{-}}-\frac{\partial u}{\partial n^{+}}$，$q:=u^{-}-u^{+}$，它们分别是$\frac{\partial u}{\partial \gamma}$及 u 穿越 Γ 时的跳跃量。

公式(9)、(10)及(11)都被称为 Helmholtz 表达式(Helmholtz representations)，它们分别用于处理内问题、外问题及全空间问题。

为了用边界元法数值求解外边值问题(1)—(3)，必须从 Helmholtz 表达式导出边界积分方程。在不同的假设下，可以导出不同的边界积分方程，它们也具有不同的性质。下面就来讨论边界积分方程的导出，同时分析它们与原问题的等价性，以及各自的优点和不足之处。

2　间接边界积分方程

2.1　第二类 Fredholm 边界积分方程

设问题(1)—(3)的解 u 能用单层位势表示为

$$u(y)=\frac{-1}{2}(Sp)(y),\ y\in\Omega' \tag{12}$$

对照 Helmholtz 表达式(11)，这意味着假设了 $q\equiv 0$。为了满足此项假设，注意到 $q=u^{-}-u^{+}$，就必须将函数 u 从Ω'延拓到 Ω 内，并使得

$$\begin{cases}\Delta u+k^{2}u=0,\ 在\Omega内 & (13)\\ u^{-}=u^{+},\ 在\Gamma上 & (14)\end{cases}$$

这是一个 Helmholtz 方程的 Dirichlet 内边值问题。

将(12)两端求法向导数，利用跳跃量关系式(7)及边值条件(2)，得到

$$p(y)+\int_{\Gamma}p(x)\frac{\partial}{\partial n_{y}}E(x,y)d_{0}x=-2g(y),\ y\in\Gamma \tag{15}$$

这是一个以函数 p 为未知量的第二类 Fredholm 边界积分方程。若此方程有解 p，则(12)式就给出了原问题(1)—(3)的解 u。

现在看边界积分方程(15)是否与原外问题等价。从上面的推导可知：欲得方程(15)，须使问题(13)—(14)有解。而众所周知[6]：Helmholtz 方程的 Dirichlet 或 Neumann 外问题均没有特征值，因此有解必唯一；而该方程的 Dirichlet 或 Neumann 内问题均有特征值，因此若波数 k 是问题(13)—(14)的特征值，则此问题有解必不唯一，再注意到 $p=\frac{\partial u}{\partial n^{-}}-\frac{\partial u}{\partial n^{+}}$，从而知道方程(15)有解必不唯一。然而此时原问题(1)—(3)若有解仍是唯一的

，可见方程(15)与原问题是不等价的。

不过，当 k 不是内问题(13)—(14)的特征值时，方程(15)被用来求原问题的数值解是方便的，这因为它是第二类 Fredholm 方程、其核又只有较弱的奇异性，数值求解时，理论和方法都较为完备和成熟。

2.2 第一类 Fredholm 边界积分方程

设问题(1)—(3)的解 u 能用双层位势表示为：

$$u(y)=\frac{1}{2}(Dq)(y),y\in\Omega' \tag{16}$$

对照 Helmholtz 表达式（11），这意味着假设了 $p\equiv 0$。为了满足此项假设，注意到 $p=\frac{\partial u}{\partial n^-}-\frac{\partial u}{\partial n^+}$，就必须将函数 u 从 Ω' 延拓到 Ω 内，并使得

$$\begin{cases}\Delta u+k^2u=0,\ 在\Omega内 & (17)\\ \frac{\partial u}{\partial n^-}=g,\ 在\Gamma上 & (18)\end{cases}$$

这是一个 Helmholtz 方程的 Neumann 内问题。

将（16）式两端求法向导数，利用双层位势法向导数穿越Γ 时的连续性以及边值条件(2)，得

$$\int_\Gamma q(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}E(x,y)d_0x=2g(y),\ y\in\Gamma \tag{19}$$

这是一个以函数 q 为未知量的第一类 Fredholm 边界积分方程。若此方程有解 q，代人表达式(16)，即得到了原问题(1)—(3)的解 u。

基于 2.1 段已经阐述的理由，方程（19）与原问题并不等价。当波数 k 是问题（17）—(18)的特征值时，虽然原问题有解必唯一，但方程(19)若有解却不是唯一的。

J.C.Nedlec 曾经指出[5]：当 k 不是问题(17)—(18)的特征值时，方程(19)的核虽然具有高阶奇异性，它仍具有确切的数学含意并在适当 Seboler 空间中存在唯一解，而且可以数值逼近。笔者证明了这个结论[2]。

3 直接边界积分方程

3.1 第二类 Fredholm 边界积分方程

据 Helmholtz 表达式(10)，可得

$$u^+(y)=(S\frac{\partial u}{\partial n^+})(y)-(Du^+)(y),\ y\in\Gamma \tag{20}$$

取$\frac{\partial u}{\partial n^+}$为边值条件(2)中的已知函数 g，即得：

$$u^+(y)+\int_\Gamma u^+(x)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)d_0x=\int_\Gamma g(x)E(x,y)d_0x,\ y\in\Gamma \tag{21}$$

这是一个以u^+ 为未知量的第二类 Fredholm 边界积分方程。若此方程有解u^+，将其代人(10)式，得

$$u(y)=\frac{1}{2}(Sg)(y)-\frac{1}{2}(Du^{+})(y),y\in\Omega' \tag{22}$$

此即原问题(1)—(3)的解。

但须指出:(22)式给出的解并不能保证一定满足边值条件(2)。而且，根据Fredholm抉择定理，方程(21)有唯一解的充要条件是其齐次共轭方程。

$$u^{+}(y)+\int_{\Gamma}u^{+}(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\overline{E(x,\ y)}\,d_0x=0 \tag{23}$$

只有零解，而此方程是由Helmholtz方程的齐次Dirichlet内边值问题化归而来的，此边值问题具有特征值[4]，于是基于第二节阐述的理由知道方程(21)与原边值问题仍然不是等价的。

不过，当 k 不是Helmholtz方程内问题的特征值时，使用方程(21)来求原问题的数值解是方便的，因为它的核只具有弱的奇异性，而且它是第二类Fredholm方程，可用古典的配置法求数值解。

3.2 第一类Fredholm边界积分方程

据Helmholtz表达式(10)可得:

$$u(Y)=\frac{1}{2}(S\frac{\partial u}{\partial n^{+}})(Y)-\frac{1}{2}(Du^{+})(Y),Y\in\Omega' \tag{24}$$

在任意 $y\in\Gamma$ 处，将上式沿 y 点的外法向量n_y^{+} 求法向导数，取$Y^{+}\in n_y^{+}$ 且让$Y^{+}\to y$，利用双层位势法向导数的连续性及单层位势法向导数穿越 Γ 的跳跃关系式(7)，得

$$\int_{\Gamma}u^{+}(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}E(x,y)\mathrm{d}_0x=-\frac{\partial u}{\partial n_y^{+}}+\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n_x^{+}}\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)\mathrm{d}_0x,\ y\in\Gamma \tag{25}$$

取上式中$\frac{\partial u}{\partial n^{+}}$ 为边值条件(2)中的已知函数 g，得

$$\int_{\Gamma}u^{+}(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}E(x,y)\,d_0x=-\ g(y)+\int_{\Gamma}g(x)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)\,d_0x,\ y\in\Gamma \tag{26}$$

这是一个以u^{+} 为未知量的第一类Fredholm边界积分方程。若此方程有解u^{+}，将其代入(24)式，即得到原边值问题(1)—(3)的解 u:

$$u(y)=\frac{1}{2}(Sg)(y)-\frac{1}{2}(Du^{+})(y),\ y\in\Omega' \tag{27}$$

笔者证明了[3]:对于 $g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，方程(26)在$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$中对任意波数 k 存在唯一解，而且，在将原边值问题(1)—(3)在适当Sobolev空间中加以严格表述后，它是与边界积分方程(26)等价的。

从直接边界积分方程(21)及(26)的推导过程中不难发现:方程(26)较(21)包含了更多的信息量。为了推导方程(26)，我们从Ω'中的Helmholtz表达式出发，求法向导数后让Ω'中的点逼近边界点;相反，推导方程(21)时仅仅利用了有关量在边界 Γ 上的某些性质。这就是方程(26)与原问题等价而方程(21)并非如此的最本质的原因。顺便提到，Kleinmann和Roach证明了[4]:由方程(21)及(26)构成的方程组当已知函数 $g\in L^2(\Gamma)$时，对于任意波数 k 都存在唯一解。事实上，此结论中方程(21)是多余的。

4 结 语

许多物理和工程问题的数学模型是 Helmholtz 方程的 Neumann 外边值问题,与内问题毫无关联。由此问题化归的边界积分方程(15)、(19)及(21)与原问题并不等价,其原因在于这些边界积分方程总跟内问题有某种关联,而这些关联是在化归的过程中人为加上的,是不必要的,也是不自然的。直接边界积分方程中的第一类 Fredholm 边界积分方程 (26),不但对任意波数 k 具有唯一解,而且与原问题等价,还可以数值求解。在用边界元法求解 Helmholtz 方程 Neumann 外问题时,无论从数学分析的角度看还是从数值逼近的角度看,选用边界积分方程(26)都是可靠的。

本文的观点和方法,用于由其它椭圆边值问题化归的各种边界积分方程的讨论,也是完全有效的。

参 考 文 献

1 M.S.Ingber & C.E.Hickox.A modified burtonmiller algorithm for treating the uniqueness of representation problem for exterior acoustic radiation and scattering problem.Engineering analysis with boundary elements.1992(9):323 ~ 329

2 金朝嵩.用双层位势求解三维 Helmholtz 方程 Neumann 问题的边界元法.重庆建筑工程学院学报,1990,12(3): 30 ~ 39

3 C.Jin. A direct boundary integral equation method for the acoustic scattering problem.Engineering analysis with boundary elements.1993,12(1):39 ~ 46

4 R.E.Kleinman & G.F.Roach,boundary integral equations for the three dimensional Helmholtz equation.SIAM Review,1974,16(2):214 ~ 235

5 J.C.Nedelec, Integral equation with non integrable kernels.Integral equation and operator theory,1982,5:562 ~ 572

6 V.I.Smirnov,A course of higher mathematics.Pergamon press.1964,4

7 T.W.Wu, R.D.Ciskowski & A.F.Seybert, vectorizafion and parallelization of the acoustic boundary element code BEMAP on the IBM ES/3090 VF.Engineering analysis with boundary elements,1992,10(1):17 ~ 26

Remarks for Various Boundary Integral Equations Reduced from the Exterior Neumann Problem of Helmholtz Equation

Jin Chaosong

(Department of Fundamental Sciences,Chongqing Jianzhu University,400045)

Abstract This paper presents a discussion on various boundary integral equations reduced

(编辑:陈 蓉)

(下转46页)

count is directly proportional to the total microcrack length is proposed, a relationship between total AE count and stress intensity factor for stable crack growth is derived. With a series of experimental results, the relationship between theoretical derivation and the experimental results is compared, it shows that the theoretical derivation coincides better with the experimental results.

Key Words rock, crack, acoustic emission, stress intensity factor

（编辑：陈 蓉）

（上接40页）

from the exterior Neumann problem of Helmholtz equation. The author analyses how the famous difficulty that some equations have no unique solution when the wave number k is an eigenvalue of an interior problem is arised in the course of reducing these equations from Helmholtz representations, and proposes a method of overcoming the difficulty, that is, introducing a direct boundary integral equation which has unique solution for all wave numbers k and is equivalent to the original boundary value problem. Besides, advantages and shortcomings for these integral equations are estimated respectively.

Key Words potential, boundary value problems of Helmholtz equation, boundary elements

（编辑：陈 蓉）