第21卷 第2期　　重庆建筑大学学报　　Vol.21 No.2
1999年4月　　Journal of Chongqing Jianzhu University　　Apr. 1999

弹性动力学方程边界元法计算公式探讨

(8) 38－41,48　　O343

李开海
(重庆建筑大学建筑工程学院 400045)
(中国科学院科学与工程计算国家重点实验室 北京 100080)

摘 要 弹性动力学是力学领域中的一个重要课题。在采用边界元方法计算时有许多数值方法值得探讨，尤其是奇异积分的处理。本文讨论了在 Fourier 变换下弹性动力学方程边界元方法中的奇异积分的一种计算方法。

关键词 弹性动力学;边界元方法;奇异积分
中图法分类号 O343

1 引 言

弹性动力学的研究在机械振动、地震动研究中有重要意义。探讨对弹性动力学的解法有理论意义和实际意义。随着差分法、有限元法、边界元法和电子计算机的发展，使得对该问题的数值求解成为可能。边界元方法以其独特的优点在许多领域中取得成功，其在弹性动力学方面的应用也得到了迅速的发展。作者在探讨弹性动力学的边界元区域分解算法时发现，虽然目前采用边界元方法求解弹性动力学问题的文献不少，由于计算公式繁杂，大多数文献均未给出数值计算公式。文献[1]和[2]算是公式推导比较多的文献，但不够全面。如[1]中认为当 $K=J$ 时，$H_{ij}(K,J)=0$ 和 $G_{12}(K,J)=0$，仅仅对特殊情况成立，通用性不够，且有明显错误。本文作者给出了解析计算方法。

2 基本方程

线性弹性动力学的基本方程有

运动方程

$$\sigma_{ij,i}+\rho b_j=\rho \ddot{u}_j \tag{1}$$

几何方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{2}$$

以及本构定律

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{j,i} \tag{3}$$

将(1)—(3)进行组合，得到位移方程

$$(c_1^2-c_2^2)u_{i,ij}+c_2^2u_{j,ii}+b_j=\ddot{u}_j \quad (i,j=1,2) \tag{4}$$

(4)又可写为

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u)+\mu\nabla^2u+\rho b=\rho\ddot{u} \tag{5}$$

式中的 $u_i(x,t)$ 为点 x 在时刻 t 的位移矢量，σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别为应力张量和应变张量，b_i 为单位质量的体积力。λ、μ 为拉梅(Lamé)常数，ρ 为质量密度。在上述公式中使用了笛卡尔坐标系($i,j=1,2$)，对重复指标采用了求和约定。逗号表示对空间变量的微分，点号表示对时间求导。膨胀波和扭曲波

收稿日期:1999-03-10
李开海，男,1969年生,讲师

的传播速度 c_1 和 c_2 满足

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\ ,\quad c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{6}$$

δ_{ij} 为科罗内克 δ 符号。λ 和 μ 与弹性模量 E、泊桑比 υ 的关系是

$$\lambda=\frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\ ,\mu=\frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{7}$$

弹性动力学方程中必须满足的初始条件和边界条件定义为：

初始条件：

$$\begin{cases} u_i(x,t)=u_i^0(x) \\ \dot{u}_i(x,t)=v_i^0(x) \end{cases} \quad 对\ t=t_0\ 在\ \Omega+\Gamma\ 上 \tag{8}$$

$u_i^0(x)$、$v_i^0(x)$ 是给定的已知函数。

边界条件：

$$\begin{cases} u_i(x,t)=\bar{u}_i(x,t) & 对 t>t_0 在\Gamma_1上 \\ t_i(x,t)=\sigma_{ij}n_j=\bar{t}_i(x,t) & 对 t>t_0 在\Gamma_2上 \end{cases} \tag{9}$$

t_i 为面力矢量的分量，n_j 为边界点的外法向矢量的分量，$\bar{u}_i$、$\bar{t}_i$ 分别为已知位移矢量和面力矢量的分量。

定义函数 $u(x,t)$ 的 Fourier 积分变换

$$U(x,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

将(10)作用于(4)和(9)得到在变换域内我们要讨论的基本方程

$$\begin{cases} (c_1^2-c_2^2)U_{i,ij}(x,\omega)+c_2^2U_{j,ii}(x,\omega)+B_j+\omega^2U_i(x,\omega)=0 & 在\Omega内 \\ U_i(x,\omega)=\bar{U}_i(x,\omega) & 在\Gamma_1上 \\ T_i(x,\omega)=\bar{T}_i(x,\omega) & 在\Gamma_2上 \end{cases} \tag{11}$$

3　边界积分方程

在不计体力和初始条件为零的情况下，采用广义 Green 公式或加权余量法等方法，我们可以得到内点变换位移的边界积分公式

$$U_i(\zeta,\omega)=\int_\Gamma U_{ij}^*(\zeta,\omega)\,T_i(\zeta,\omega)\,\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma T_{ij}^*(\zeta,\omega)\,U_i(\zeta,\omega)\,\mathrm{d}\Gamma \tag{12}$$

如果 ζ 由 Ω 趋向边界 Γ 时，可得变换位移 U_i 的边界积分方程

$$\alpha_{ij}(\zeta)U_i(\zeta,\omega)=\int_\Gamma U_{ij}^*(\zeta,\omega)\,T_i(\zeta,\omega)\,\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma T_{ij}^*(\zeta,\omega)\,U_i(\zeta,\omega)\,\mathrm{d}\Gamma \tag{13}$$

其中

$$\alpha_{ij}=\begin{cases} 0 \\ \dfrac{1}{2}E & 边界\Gamma光滑 \\ E \end{cases}$$

E 是二阶单位矩阵。U_{ij}^* 和T_{ij}^*[5]如下：

$$U_{ij}^*=\frac{1}{2\pi\rho c_2^2}(\bar{\varphi}\,\delta_{ij}-\bar{\chi}\,r_{,i}\,r_{,j}) \tag{14}$$

$$T_{ij}^*=\frac{1}{2\pi}\Big[\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\chi}}{\mathrm{d}r}-\frac{\bar{\chi}}{r}\right)\left(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n}+r_{,j}n_i\right)-2\frac{\bar{\chi}}{r}\left(n_jr_{,i}-2r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}\right)-2\frac{\mathrm{d}\bar{\chi}}{\mathrm{d}r}r_{,i}\,r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}+\left(\frac{c_1^2}{c_2^2}-2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}}{\mathrm{d}r}-\frac{\mathrm{d}\bar{\chi}}{\mathrm{d}r}-\frac{\bar{\chi}}{r}\right)r_{,i}n_j\Big] \tag{15}$$

其中

$$\bar{\varphi}=K_0\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)+\frac{c_2}{i\,\omega\,r}\left[K_1\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)-\frac{c_2}{c_1}K_1\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_1}\right)\right]$$

$$\bar{\chi}=K_2\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2K_2\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)$$

K_0,K_1,K_2 分别是修正的零阶、一阶、二阶第二类 Bessel 函数。

4 边界积分方程的数值计算方法

对边界积分方程(13),我们采用配置法进行离散单元,假设边界离散为 N 个单元,并用常单元,得到

$$\alpha_K\ U_K=\sum_{J=1}^{N}\left[\int_{\Gamma_J}U^*\,\mathrm{d}\,\Gamma_J\right]\ T_J-\sum_{J=1}^{N}\left[\int_{\Gamma_J}T^*\,\mathrm{d}\,\Gamma_J\right]\ U_J \tag{16}$$

(16)又可写为

$$\alpha_K\ U_K=\sum_{J=1}^{N}U_{KJ}^*\ T_J-\sum_{J=1}^{N}H_{KJ}^*\ U_J \tag{17}$$

其中

$$G_{KJ}^*=\int_{\Gamma_J}U^*\,\mathrm{d}\,\Gamma_J\ ,\quad H_{KJ}^*=\int_{\Gamma_J}T^*\,\mathrm{d}\,\Gamma_J \tag{18}$$

令

$$\begin{cases}G_{KJ}=G_{KJ}^*\\H_{KJ}=H_{KJ}^*+\alpha\ \delta_{KJ}\end{cases} \tag{19}$$

则(19)变为:

$$\sum_{J=1}^{N}H_{KJ}\ U_J=\sum_{J=1}^{N}G_{KJ}\ T_J \tag{20}$$

将所有节点形成方程的紧凑格式

$$HU=GT \tag{21}$$

从而可以得到形如 $AX=B$ 的方程形式。

当 $K\neq J$ 时,$H_{ij}^*(K,J)$ 和 $G_{ij}^*(K,J)$ 可直接采用数值积分方法计算。当 $K=J$ 时,由于 $r=0$,就存在奇异积分问题。对奇异积分有许多实用的处理技术,毫无疑问,解析方法是最可靠的方法。下面给出 G_{ij} 的计算方法。

$$\begin{aligned}G_{11}&=\int_{\Gamma_J}U_{11}(K,J)\ \mathrm{d}\ \Gamma_J\\&=\frac{1}{2\,\pi\,\rho\,c_2^2}\left\{\left[2+\left(\frac{r_1}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_J}K_0\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)\mathrm{d}\ \Gamma_J-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\left[1+\left(\frac{r_1}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_J}K_0\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_1}\right)\mathrm{d}\ \Gamma_J-\right.\\&\left.\left[1+2\left(\frac{r_1}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_J}K_1'\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)\mathrm{d}\ \Gamma_J+\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\left[1+2\left(\frac{r_1}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_J}K_1'\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_1}\right)\ \mathrm{d}\Gamma_J\right\}\end{aligned} \tag{22}$$

同理可得

$$\begin{aligned}G_{22}=&\frac{1}{2\,\pi\,\rho\,c_2^2}\left\{\left[2+\left(\frac{r_2}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_J}K_0\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)\ \mathrm{d}\ \Gamma_J-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\left[1+\left(\frac{r_2}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_J}K_0\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_1}\right)\mathrm{d}\ \Gamma_J-\right.\\&\left.\left[1+2\left(\frac{r_2}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_J}K_1'\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)\ \mathrm{d}\ \Gamma_J+\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\left[1+2\left(\frac{r_2}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_J}K_1'\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_1}\right)\ \mathrm{d}\Gamma_J\right\}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}G_{11}&=G_{22}\\&=\frac{1}{2\,\pi\,\rho\,c_2^2}\frac{r_1\,r_2}{L^2}\left\{\int_{\Gamma_J}K_0\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_2}\right)\ \mathrm{d}\ \Gamma_J-\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\int_{\Gamma_J}K_0\left(\frac{i\,\omega\,r}{c_1}\right)\mathrm{d}\ \Gamma_J-\right.\end{aligned}$$

$$2\int_{\Gamma_j} K_1'\left(\frac{i\omega r}{c_2}\right)\mathrm{d}\Gamma_j + 2\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\left[1+2\left(\frac{r_2}{L}\right)^2\right]\int_{\Gamma_j} K_1'\left(\frac{i\omega r}{c_1}\right)\mathrm{d}\Gamma_j\Big\} \tag{24}$$

其中 $r_1 = x_2 - x_1$, $r_2 = y_2 - y_1$, $L = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$。

要计算 $G_{ij}(i,j=1,2)$归结为计算 $\int_{\Gamma_j} K_0\left(\frac{i\omega r}{c}\right)\mathrm{d}\Gamma_j$ 和 $\int_{\Gamma_j} K_1'\left(\frac{i\omega r}{c}\right)\mathrm{d}\Gamma_j$ 形式的积分。

令 $R = \frac{L}{2}$，则

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_j} K_0\left(\frac{i\omega r}{c}\right)\mathrm{d}\Gamma_j &= \int_{-R}^{0} K_0\left(\frac{i\omega r}{c}\right)\mathrm{d}r + \int_0^R K_0\left(\frac{i\omega r}{c}\right)\mathrm{d}r\\ &= -\frac{c}{i\omega}\int_0^{-\frac{i\omega R}{c}} K_0(z)\,\mathrm{d}z + \frac{c}{i\omega}\int_0^{\frac{i\omega R}{c}} K_0(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_j} K_1'\left(\frac{i\omega r}{c}\right)\mathrm{d}\Gamma_j &= \int_{-R}^{0} K_1'\left(\frac{i\omega r}{c}\right)\mathrm{d}r + \int_0^R K_1'\left(\frac{i\omega r}{c}\right)\mathrm{d}r\\ &= -\frac{c}{i\omega}\int_0^{-\frac{i\omega R}{c}} K_1'(z)\,\mathrm{d}z + \frac{c}{i\omega}\int_0^{\frac{i\omega R}{c}} K_1'(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{c}{i\omega}\left[K_1(z)\Big|_{-\frac{i\omega R}{c}}^{0} + K_1(z)\Big|_0^{\frac{i\omega R}{c}}\right]\\ &= \frac{c}{i\omega}\left[-K_1\left(\frac{-i\omega R}{c}\right) + K_1\left(\frac{i\omega R}{c}\right)\right]\end{aligned} \tag{26}$$

当 $K \neq J$ 时，$H_{ij}(K,J)$可以直接采用数值计算方法计算。当 $K = J$ 时，对 $H_{ij}(K,J)$的计算参看[4]。

$$H_{ij}(K,J) = -\sum_{J=1,K\neq J}^{N} H_{ij}(K,J) \quad K = 1,2,\cdots N \tag{27}$$

通过上面的推导，对弹性动力学问题边界元法的奇异积分的计算，归结为计算 $\int_0^Z K_0(z)\,\mathrm{d}z$ 和 $K_0(z)$, $K_1(z)$, $K_2(z)$

由文献[1]可知

$$\begin{aligned}\int_0^Z K_0(z)\,\mathrm{d}z = Z\Bigg[&\left(1-\gamma-\ln\frac{z}{2}\right) + \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2 3}\left(1+\frac{1}{3}-\ln\frac{z}{2}-\gamma\right) + \cdots\\ &+ \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^n}{(n!)^2(2n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}-\gamma-\ln\frac{z}{2}\right)+\cdots\Bigg]\end{aligned} \tag{28}$$

γ 为尤拉常数，$\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 9$，而 $K_0(z)$, $K_1(z)$, $K_2(z)$的计算可以参看[3]。

通过边界元方法我们可以求得在变换域内解 $U(x,\omega)$，对足够数目的 ω，可以采用 Fourier 逆变换得到依赖于时间变量的解 $u(x,t)$。在稳态振动下，位移场 $u(x,t)$ 可用 $U(x,\omega)\,e^{i\omega t}$ 的实部表示。

$$u(x,t) = Re\ U(x,\omega)\ e^{i\omega t} \tag{29}$$

作者采用此计算方法进行过数值试验，有很好的计算效果，将另文发表。

致谢：在本文的写作过程中，得到了祝家麟教授的悉心指导和帮助，也得到了中国科学院科学与工程计算国家重点实验室的部分经费资助，在此一并表示感谢。

参 考 文 献

1 Dominguez and Alarcon, Elastodynamics, in Progress in Boundary Element Methods. Vol1(C.A.Brebbia. Ed). Pentech Press, London, Halstend Press, N.Y. 1981

2 Manolis G.D and Beskos, Dynamics stress concentration studies by boundary intergral and Laplace transform, Int.J.Numerical Methods. Engng, 17, 573－599, 1981

（下转第 48 页）

5 Oda M., Yamabe T. & Kumemura K., A crack tensor and its relation to wave velocity anisotropy in jointed rock masses, Int. J. Rock Min. Sci. & Geomech. Abstr., 23(6), 387 - 397, 1986
6 Oda M., An experimental study of the elasticity of mylonite rock with random cracks, Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr., 25(2), 59 - 69, 1988
7 Roe R. J., Inversion theory of pole figures, J Chem. phys 40(8), 2608 - 2615, 1964
8 赵明阶．裂隙岩体在受荷条件下的声学特性研究：[博士学位论文]．重庆：重庆建筑大学，1998

A Calculating Method for the Crack Tensor of the Orthotropic Rockmass by the Elastic Wave Velocity

Zhao Mingjie *Xu Rong*
(Chongqing Jiaotong University, 400074)

Abstract A method was proposed for calculating the crack tensor by the elastic wave velocities in the orthotropic rock masses, based on the theoretical relations of crack tensor and compliance tensor and elastic wave velocities, The numerical results show that there is a good correlation with the measured data.

Key Words rock masses; elastic wave velocities; crack tensor

(上接第41页)

3 刘式适，刘式达编著．特殊函数．北京：气象出版社，1988
4 祝家麟．椭圆边值问题的边界元分析．北京：科学出版社，1991
5 G.D. 马诺利斯，D.E. 贝思科思著．弹性动力学的边界单元法．周锡礽，陈火坤译．天津：天津科学技术出版社，1991

Discussion on the Problem of the Calculation Formula for Elastodynamics with Boundary Element Method

Li Kaihai
(Faculty of Civil Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045)

Abstract It is an important subject to solve the problem of Elastodynamics numerically. In this paper, a calculation formula to compute singular intergral for elastodynamics under Fourier transform using Boundary Element Methods is discussed.

Key Words elastodynamics; Boundary Element methods; singular intergral