文章编号:1006-7329(2000)05-0001-06

# 将任意多项式矩阵变换为Smith规范形的通用程序及其应用*

① 2000,22(5) 1-6 TP301.6

童明俶, 邓亦仁, 幸晓珂
(重庆建筑大学 机电学院,重庆 400045)

**摘要**:在用现代频域法分析和设计多变量控制系统时,常常需要将多项式矩阵变换为Smith规范形,这是一个十分复杂烦琐的计算过程。本文分析了将任意多项式矩阵变换为Smith规范形的一般步骤,讨论了编程中的处理方法和技巧,给出了将任意多项式矩阵变换为Smith规范形的变换程序之$N-S$流程图。通过两个变换及应用实例,表明该程序是正确的、简便的、实用的,并具有良好的通用性,对多变量系统的频域分析和设计具有一定的应用价值。

**关 键 词**:多项式矩阵;Smith规范形;现代频域法 通用程序
**中图分类号**:TP301.6 **文献标识码**:A

从20世纪60年代中期开始,以Rosenbrock和Macfarlane为代表的一批学者开始致力于研究多变量控制系统的频域方法及其与状态空间方法之间的联系,他们应用多项式矩阵理论和复变量代数理论来分析研究多变量系统,提出了不同于状态空间方法但又与之有一定联系的多变量控制系统的现代频域法。这种方法保留了古典频域法的优点,应用该法设计出的控制器与状态空间法相比具有结构简单、价格低廉,易于实现的优点。随着这种方法的不断发展和日益完善,在工业中获得了愈来愈广泛的应用[1]。

在用现代频域法分析和设计多变量控制系统时,常常需要将多项式矩阵变换为Smith规范形。某些专门文献给出了将多项式矩阵变换为Smith规范形的一般步骤[2][3],但这是一个十分复杂繁琐的计算过程。为了便于用现代频域法分析和设计多变量系统,很有必要编写一个将任意多项式矩阵变换为Smith规范形的通用程序。

## 1 多项式矩阵的表示及各元素阶次的确定

为了表示一个$M\times L$的多项式矩阵$A(s)$,作者采用了三维数组$A(I,J,K)(I=1,M;J=1,L;K=0,N)$,其中$M$为矩阵的行数,$L$为矩阵的列数,$N$为矩阵$A(s)$的各阶子式中$s$的最高阶次,$(I,J)$表示元素位置,$A(I,J,K)$表示该元素多项式中各阶幂$S^K$的系数。

程序中还专门引入了二维整型数组$N1(I,J)(I=1,M;J=1,L)$来存放多项式矩阵$A(s)$中各元素的阶次。为了将零阶非零常数元素与零元素区别开来,程序中非零元素的实际阶次加1后再存放到$N1(I,J)$中;而对于零元素,则令$N1(I,J)=0$。换句话说,若$N1(I,J)=0$,则表示$A(s)$中处于$(I,J)$位置的元素为零元素;反之,若$N1(I,J)\neq 0$,则$A(s)$中处于$(I,J)$位置的元素为非零元素,其实际阶次$n=N1(I,J)-1$。在判断各元素的阶次时,从最高可能阶次$N$开始,按降幂顺序进行,最先出现的非零系数所对应的阶次$n$,就是该元素的实际阶次,此时令$N1(I,J)=n+1$;若某元素中$S$的$N\sim 0$各阶幂的系数均为零,则该元素为零元素,令$N1(I,J)=0$。每进行一次多项式乘法或

* 收稿日期:2000-01-20
作者简介:童明俶(1942-)、男,重庆人,教授,主要从事建筑智能化研究。

除法运算后均应重新检查并记录一次有关元素的阶次。

## 2 多项式乘法及除法的运算子程序

### 2.1 多项式乘法运算子程序

多项式乘法运算比较简单,可直接利用乘法公式。设

$$(A_nS^n + A_{n-1}S^{n-1} + \cdots + A_1S + A_0)(B_mS^m + B_{m-1}S^{m-1} + \cdots + B_1S + B_0)$$
$$= C_lS^l + C_{l-1}S^{l-1} + \cdots + C_1S + C_0 \tag{1}$$

式中:$l=n+m$,比较(1)式两端 $S$ 同次幂的系数,可得:

$$C_K = \sum_{j=0}^{K} A_j \cdot B_{K-j} (K = 0,1,2,\cdots,l) \tag{2}$$

根据(2)式,不难编写出多项式乘法运算子程序 Polymul$(A,n,B,m,C)$:

```
Subroutine Polymul(A,n,B,m,C)
Real A(0:n),B(0:m),C(0:n+m)
N2=n+m
DO 10,K=0,N2
  C(K)=0
  DO 20,J=0,K
    C(K)=C(K)+A(J)*B(K-J)
20  Continue
10  Continue
END
```

### 2.2 多项式除法运算子程序

多项式除法在不能整除时既有商式,又有余式。若按被除式等于除式乘以商式再加余式进行计算,为了确定商式和余式的各项系数,需要求解$(n+1)$维($n$ 为被除式的阶次)联立代数方程,通常十分麻烦。我们巧妙地应用了多项式常除法的运算步骤,同时考虑到商式的阶次应为被除式与除式的阶次之差,余式的阶次至少比除式的阶次低1次,若将被除式和除式按降幂顺序排列,则商式的各项系数可由被除式当前剩余部分的最高次系数除以除式的最高次系数得到,然后将商式的此项系数乘以除式的各项系数再与被除式剩余部分的相应项系数相减,求出其剩余部分,下次再按剩余部分的最高次系数试商,如此反复,直至剩余部分阶次低于除式阶次为止。设:

$$(A_nS^n + A_{n-1}S^{n-1} + \cdots + A_1S + A_0)/(B_mS^m + B_{m-1}S^{m-1} + \cdots + B_1S + B_0)(n \geqslant m)$$

的商式为:　$C_lS^l + C_{l-1}S^{l-1} + \cdots + C_1S + C_0$

余式为:　$D_KS^K + D_{K-1}S^{K-1} + \cdots + D_1S + D_0$

式中:

$$\left.\begin{aligned} l &= n - m \\ K &\leqslant m - 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

根据以上分析,可以方便地编写出多项式除法的运算子程序 Polydiv$(A,n,B,m,C,D)$:

```
Subroutine Polydiv(A,n,B,m,C,D)
Real A(0:m),B(0:m),C(0:n-m),D(0:n)
N2=n-m
DO 10,I=0,n
  D(I)=A(I)
10 Continue
```

```
  DO 20,I=0,N2
  C(I)=0
20 Continue
  DO 30,I=N2,0,-1
    C(I)=D(m+I)/B(m)
    DO 40,J=m,0,-1
      D(I+J)=D(I+J)-C(I)*B(J)
40 Continue
30 Continue
  END
```

为了简化计算程序，并保留原被除式不变，在该子程序中，存放余式的数组 $D$ 是按被除式的阶次定维的。但运算结束后，$D(n)=D(n-1)=\cdots=D(m)=0$，即数组 $D$ 中的有效元素不会超过 $m$ 个 $(0\sim m-1)$。

## 3　变换步骤及其 $N-S$ 流程图

任意多项式矩阵 $A(s)$ 均可通过矩阵的初等变换成为 Smith 规范形，其变换程序之 $N-S$ 流程图如图 1 所示。其中，$J_F$ 为变换标志，用于控制变换的流程。$M$、$L$ 及 $N$ 分别表示多项式矩阵 $A(s)$ 的行数、列数及其各阶多项式子阵中 $s$ 的最高阶次。$R$ 为多项式矩阵的正规秩。程序中以 $(I_1,J_1)$ 表示主对角线之位置，并先令 $I_1=J_1=1$，其变换步骤如下：

1) 检查 $A(s)$（或其剩余子式）的各元素是否全为 0，若全为 0，或 $I_1=M$ 且 $J_1=L$，则令 $J_F=1$，并转步骤 9)；否则，转步骤 2)。

2) 在 $A(s)$（或其剩余子式）中，寻找阶次最低的非零元素，并记下其位置 $(I_2,J_2)$。

3) 通过行、列交换，将位于 $(I_2,J_2)$ 处之最低阶非零元素移动到主对角线位置 $(I_1,J_1)$ 处。

4) 用对角元素 $A(I_1,J_1)$ 除以第 $I_1$ 行的其他非零元素，求出其商式 $Q(I_1,J)$，再进行以下计算：$A(I,J)=A(I,J)-Q(I_1,J)*A(I,J_1)(I=I_1\sim M,J=J_1+1\sim L)$，并重新检查各元素的阶次。

5) 用对角元素 $A(I_1,J_1)$ 除以第 $J_1$ 列的其他非零元素，求出其商式 $Q(I,J_1)$，再进行以下计算：$A(I,J)=A(I,J)-Q(I,J_1)*A(I_1,J)(I=I_1+1\sim M,J=J_1\sim L)$，并重新检查各元素的阶次。

6) 检查第 $I_1$ 行及第 $J_1$ 列各元素，除对角元素 $A(I_1,J)$ 外，是否全为 0，若全为 0，则转步骤 7)；否则，令 $J_F=2$，再转步骤 2)。

7) 检查对角型子阵是否满足整除性，若满足，则令 $I_1=I_1+1,J_1=J_1+1,J_F=0$，并转步骤 1)；否则，记下不能整除元素之行号 $I_2$，并令 $J_F=3$，再转步骤 8)。

8) 进行以下计算：$A(I_1,J)=A(I_1,J)+A(I_2,J)(J=J_1+1\sim L)$，然后转步骤 5)。

9) 将各对角元素 $A(I_1,J_1)$ 多项式的各项系数分别除以其最高阶项之系数，将其变换为首 1 不变多项式，则可获得其 Smith 规范形。

通过步骤 2)～5)的反复变换，可将 $A(s)$ 的非零子阵变换为对角型子阵；通过步骤 5)～8)的反复变换，可使对角型子阵满足整除性。

## 4　应用举例

［例 1］

已知 $A(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & S^3+S^2 & S^2+2S\\ 0 & 0 & S+2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，试将 $A(s)$ 变换为 Smith 规范形 $S(S)$，并求出其正规秩 $R$。

[解]：

1. 确定 $M$、$L$、$N$

$M=4$，$L=3$，$A(s)$ 的各阶子式中 $s$ 的最高阶次 $N=4$。

2. 输入 $A(s)$ 的非零元素，其相应的 DATA 语句如下：

```
DATA  A(1,1,0),A(1,1,1),A(1,1,2),A(1,1,3),A(1,1,4)/1.0,4*0./
DATA  A(2,2,0),A(2,2,1),A(2,2,2),A(2,2,3),A(2,2,4)/2*0.,2*1.0,0./
DATA  A(2,3,0),A(2,3,1),A(2,3,2),A(2,3,3),A(2,3,4)/0.,2.0,1.0,2*0./
DATA  A(3,3,0),A(3,3,1),A(3,3,2),A(3,3,3),A(3,3,4)/2.0,1.0,3*0./
DATA  A(4,3,0),A(4,3,1),A(4,3,2),A(4,3,3),A(4,3,4)/1.0,4*0./
```

3. 应用图 1 的变换程序，对 $A(s)$ 进行变换，其结果如下：

$$R=3$$

$$S(S)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & S^3+S^2\\ \hdashline 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

[例 2]

已知某多变量系统的传递函数矩阵为：

$$G(S)=\begin{bmatrix}\frac{1}{S+1} & 0 & \frac{S-1}{(S+1)(S+2)}\\ \frac{-1}{S-1} & \frac{1}{S+2} & \frac{1}{S+2}\end{bmatrix}$$

试求该系统的有限极点与零点。

[解]：

为了求该系统的有极限点与零点，根据 Rosenbrock 定义，需首先将 $G(S)$ 变换为 Smith－McMillan 规范形。为此，可先将 $G(S)$ 中各元素分母多项式的最小公因式 $d(S)$ 提出，再将余下的多项式矩阵 $N(S)$ 变换为 Smith 规范形。即：

$$G(S)=\begin{bmatrix}\frac{1}{S+1} & 0 & \frac{S-1}{(S+1)(S+2)}\\ \frac{-1}{S-1} & \frac{1}{S+2} & \frac{1}{S+2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(S+1)(S+2)(S-1)}\begin{pmatrix}(S+2)(S-1) & 1 & (S-1)^2\\ -(S+1)(S+2) & S^2-1 & S^2-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{d(S)}N(S)$$

其中，$d(S)=(S+1))S+2)(S-1)$

$$N(S)=\begin{pmatrix}(S+2)(S-1) & 0 & (S-1)^2\\ -(S+1)(S+2) & S^2-1 & S^2-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}S^2+S-2 & 0 & S^2-2S+1\\ -S^2-3S-2 & S^2-1 & S^2-1\end{pmatrix}$$

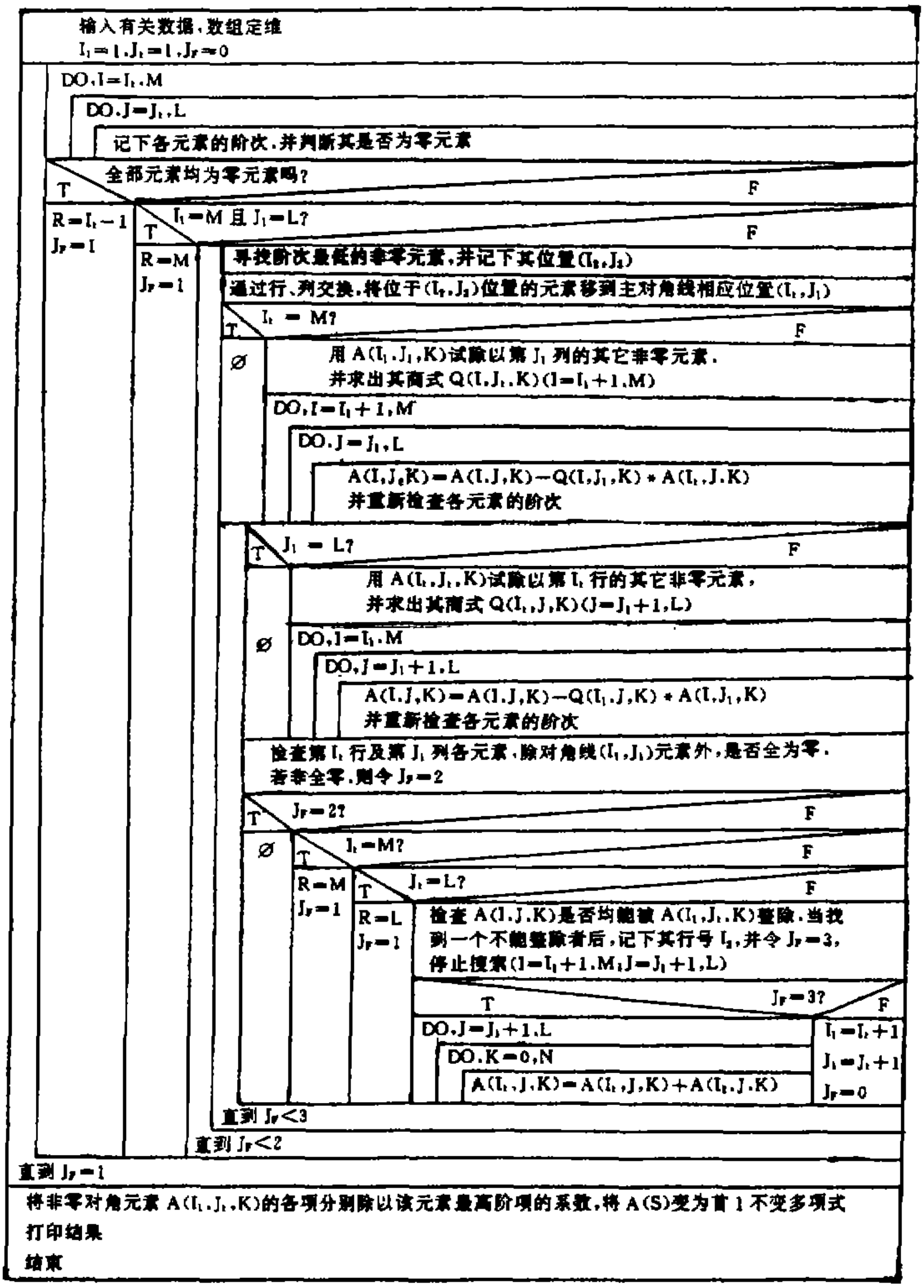


图1　变换程序的 $N-S$ 流程图

应用图1的变换程序将多项式矩阵 $N(S)$ 变换为Smith规范形 $S(S)$，结果如下：

$$S(S)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & S^3-S^2-S+1 & \vdots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & (S+1)(S-1)^2 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

故$G(S)$的 Smith－McMillan 规范形$M(S)$为：

$$M(S)=\frac{1}{d(S)}S(S)=\left[\begin{array}{cc:c}\frac{1}{(S+1)(S+2)(S-1)} & 0 & 0\\ 0 & \frac{S-1}{S+2} & 0\end{array}\right]$$

根据 Rosenbrock 定义可知，该系统存在4个有限极点：1个$S=-1$，2个$S=-2$，1个$S=1$；存在1个有限零点：$S=1$。可以看出，该系统在$S=1$处存在着相同的极点和零点，而不形成对消。这是多变量系统不同于单变量系统的一个重要特征。

上述两个应用实例表明，本文给出的变换程序是正确的、简便的、实用的，并具有良好的通用性，对多变量系统的频域分析和设计具有一定的应用价值。

## 参考文献：

[1] 涂健．控制系统的数字仿真与计算机辅助设计[M]．武汉：华中工学院出版社

[2] 须田信英．自动控制中的矩阵理论[M]．曾长修译．北京：科学出版社

[3] 郑大钟．线性系统理论[M]．北京：清华大学出版社

# A General Program for Transforming an Arbitrary Polynominal Matrix into Smith's Canonical Form and Its Application

*TONG Min-shu, GENG Yi-ren, XIN Xiao-ke*

(Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Chongqing Jianzhu University, 400045, China)

**Abstract**: To analyze and design multivariable control system by modern frequency-domain method, there should be a transformation of an arbitrary polynominal matrix into Smith's canonical form. This paper discusses the treating method and technique in programming and gives a N－S flow diagram of program to transform an arbitrary polynominal matrix into Smith's canonical form. Two transformed and applied examples show, that the program is correct, simple, useful and has good suitability. It is applicable to frequency－domain analysis and design of multivariable system.

**Key words**: polynominal matrix; Smith's canonical form; modern frequency-domain method