(14)
第22卷 第6期 重庆建筑大学学报 Vol.22 No.6
2000年12月 Journal of Chongqing Jianzhu University Dec. 2000

文章编号：1006－7329(2000)06－0054－04

54－57

高阶奇异边界积分的新型求积公式*

唐少武，冯振兴，李正秀
（武汉大学 数学与计算机科学学院，武汉 430072）

O175

摘要：引用国内外有关奇异积分方程理论研究的较新成果，讨论了直线段上含任意阶奇异性的奇异积分的数值求积，按照奇点在单元端点和内点两种情况，分别给出了具体的求积公式。最后用本文公式计算了一个有解析结果可资对比的简单实例，表明本文格式精度高而计算量小。

关 键 词：边界元法；高阶奇异积分；数值求积
中图分类号：O175 **文献标识码**：A

不少工程实际问题常归结为二阶偏微分方程，相应的边界积分方程(BIE)则归结为由基本解 u^*（或法向导数 q^*）与未知函数 u 及 q 乘积的奇异积分。设控制微分方程为：

$$Au(x) = f(x) \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

A 为二阶偏微分算子，$f(x)$ 为已知源函数。记算子 A 的基本解为 u^*，则方程(1)的 BIE 的表达式为：

$$c(x)u(x) = \int_{\Omega} f(x')u^*(x,x')\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma}(u^*(x,x')q(x') - q^*(x,x')u(x'))\mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

经边界元剖分，涉及的单元积分为：

$$I(q,A^*,x) = \int_{\Gamma} A^*(x,x')q(x')\mathrm{d}\Gamma(x') \tag{3}$$

$$I(u,q^*,x) = \int_{\Gamma} q^*(x,x')u(x')\mathrm{d}\Gamma(x') \tag{4}$$

为求积需要，用等参变换将 Γ_e 映射成[－1,1]上的直线元，只是积分中出现 Jacobi 因子 J_e。

需指出，对于 $\frac{1}{r^m}$ 型奇异函数的积分，奇点在端点与在中点应予以分别讨论。为此，本文基本思想是把高次曲线元用等参变换映射为[－1,1]上的直线元，再按奇点在端点与中点两种情形推导出计算积分的高精度求积公式，其中引用了文[3]、[4]的近期理论结果。算例表明本文求积公式具有更高精度和计算效能。

1 高阶奇异积分的求积公式

1.1 奇点在积分区间内部的情形

考虑如下 m 阶奇异积分

$$I_m(f,\lambda) = \int_a^b \frac{w(x)f(x)}{(x-\lambda)^m}\mathrm{d}x, \quad \lambda \in (a,b) \tag{5}$$

* 收稿日期：2000－05－01
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19772036)
作者简介：唐少武(1971－)，男，湖北武汉人，讲师，博士，主要从事计算力学研究。

式中 $w(x)$ 为非负权函数，且 $\int_a^b w(x)\mathrm{d}x$ 存在，$\int_a^b w(x)x^n\mathrm{d}x$ 也存在 $(n=1,2,\cdots)$。

对于权函数，存在一族正交多项式 $\{P_n\}_0^{\infty}$。令 $q_n(\lambda)=\int_a^b \frac{w(x)P_n(x)}{x-\lambda}\mathrm{d}x\,(\lambda\neq a,b)$，则可得以下求积公式([3])：

$$I_m(f,\lambda)\approx\sum_{i=1}^{n}A_i f(x_i) \tag{6}$$

其中

$$A_i=\begin{cases}\dfrac{1}{(m-1)!P_n(x_i)}\left(\dfrac{q_n(\lambda)-q_n(x_i)}{\lambda-x_i}\right)^{m-1}, & \lambda\neq x_i\\[2ex] \dfrac{q_n^{(m)}(x_i)}{m!P'_n(x_i)}, & \lambda=x_i\end{cases} \tag{7}$$

若权函数 $w(x)\equiv 1$，则对应于 $w(x)$ 的正交多项式为区间 $[-1,1]$ 上的 Legendre 多项式[5]。

1.2　奇点位于积分区间端点

先要引入 Peano 导数的概念[4]。设 $[a,b]$ 为一有限区间，$f(t)$ 为 $[a,b]$ 上的函数，定义

$$f^{[0]}(a)=f(a),\ f^{[k]}(a)=k!\lim_{t\to a}\frac{f(t)-\sum\limits_{m=0}^{k-1}\dfrac{f^{[m]}(a)}{m!}(t-a)^m}{(t-a)^k}\quad(k=1,2,\cdots) \tag{8}$$

若 $f^{(k)}(a)$ 存在，则 $f^{[k]}(a)$ 也存在，且 $f^{[k]}(a)=f^{(k)}(a)$。

由上可得

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{[k]}(a)}{k!}(t-a)^k+r^n(f,a;t)(t-a)^n \tag{9}$$

它称为 $f(t)$ 在 $t=a$ 处的 Peano 展开式。只要 $f(t)$ 在 $t=a$ 处的 n 阶导数 Peano 存在，就记作 $f(t)\in P^n(a)$。

现在考虑高阶奇异积分 $\int_a^b \frac{f(t)}{(t-a)^n}\mathrm{d}t$ 或 $\int_a^b \frac{f(t)}{(t-b)^n}\mathrm{d}t$

首先考虑为常数时的情况。

1）当 $n>1$ 时定义：

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n}=-\frac{1}{(n-1)(b-a)^{n-1}} \tag{10}$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-b)^n}=-\int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{(t-b)^n}=\frac{1}{(n-1)(a-b)^{n-1}} \tag{11}$$

2）当 $n=1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)}=\ln|b-a| \tag{12}$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-b)}=-\ln|b-a| \tag{13}$$

若 $f(t)\in P^n(a)\,(n\geqslant 0)$，定义

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^{n-k+1}}+\int_a^b\frac{r^n(f,a;t)}{t-a}\mathrm{d}t \tag{14}$$

代入式(10)、(12)入(14)，得

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{[k]}(a)}{k!}\,\frac{1}{(n-k)(b-a)^{n-k}}$$

$$+\frac{f^{[n]}(a)}{n!}\ln|b-a|+\int_a^b\frac{r^n(f,a;t)}{t-a}\mathrm{d}t \tag{15}$$

若 $f(t)\in C^{n+1}[a,b]$，则

$$\int_a^b \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{n!}\frac{f^{(k)}(a)}{(b-a)^{n-k}} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n!}\int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{t-a}\mathrm{d}t \tag{16}$$

式(16)中等号右端最后一项可写成：

$$\int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{t-a}\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a)}{t-a}\mathrm{d}t + f^{(n)}(a)\int_a^b \frac{1}{t-a}\mathrm{d}t \tag{17}$$

式(17)中等号右端第一项当 $t\to a$ 时趋于 $f^{(n+1)}(a)$，是正常积分。

2 算例

采用文献[6]中奇异积分 $\int_0^2 \frac{t^2-0.8}{(t-1)^2}\mathrm{d}t$，已知准确值为1.6。文献[6]在奇点附近取几何分级节点，分别从8节点和16节点出发，当节点数至22时，按修正梯形公式算得积分值为1.590 20，误差为0.009 80，优于古典梯形公式。本文用式(8)来估计其值，先作变换 $u=t-1$，使 $u\in[-1,1]$。积分化为 $2+\frac{1}{5}\int_{-1}^{1}\frac{10u+1}{u^2}\mathrm{d}u$，相当于奇点为 $u=0$，$w=1$的二阶奇异积分，其对应的正交多项式族为 Legendre 多项式 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$。我们发现，仅取 $n=1$，立即得

$$P_1(x)=x,q_1(y)=\int_{-1}^{1}\frac{x}{x-y}\mathrm{d}x = 2+y\ln\frac{1-y}{1+y} \qquad (-1<y<1) \tag{18}$$

$P_1(x)$在[−1,1]上只有一个根 $x_1=0$，且恰好与奇点重合，由式(7)和式(8)得 $\int_{-1}^{1}\frac{10u+1}{u^2}\mathrm{d}u\approx A_1 f(0)$，其中 $f(x)=10x+1$，$A_1=\frac{q_1^{(2)}(0)}{2!P'_1(0)}$。由式(18)易得

$$q_1^{(2)}(y)=\frac{4}{y^2-1}+y\left[\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{(y-1)^2}\right] \tag{19}$$

代入 $y=0$得 $A_1=-2$，$f(0)=1$，因此 $\int_{-1}^{1}\frac{10u+1}{u^2}\mathrm{d}u\approx A_1 f(0)=-2$。最后可得积分之值为1.6，恰好等于精确值，这说明本文公式精度高，计算量小，适用于具任意高阶奇性的积分，可望用于更复杂的边界模式。

参考文献：

[1] Philippe G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems[M]. North-Holland publishing company, 1978

[2] Pina. H, Numerical integration[J]. Brebbia CA ed. Topics in Boundary Element Research, 1987, (3)

[3] 杜金元. 高阶奇异积分的求积公式[J]. 数学年刊, 1985, 6A(5): 625~636, 1985

[4] Lu Jianke, Peano derivatives and singular integrals of arbitrary order[J]. Wuhan University J. of Natural Sciences, 1996, 1(1): 9~13

[5] 徐利治, 王仁宏, 周蕴时. 函数逼近的理论与方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983

[6] 余德浩. 自然边界元方法的数学方法[M]. 北京: 科学出版社, 1993

A New Quadrature Formulae for Singular Boundary Integrals with Higher Order Singularities

TANG Shao-wu, *FENG Zhen-xing*, *LI Zheng-xiu*
(School of Mathematics & Computer Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In the present paper, some recent results in research on the singular theory are introduced to treat the numerical integration on a line element with arbitrary order singularities. According to the singular point being at the corner or at the edge, there would be two kinds of quadrature formulae. A comparison between the analytical results and the numerical ones by using the formulae of this paper shows a high accuracy and lower computing cost by using the new formulae.

Keywords: boundary element method; singular integral with higher singularities; numerical quadrature

(上接第53页)

The Boundary Element Method of Roller Bearing by Plate Unit Analogue

SHU Xue-dao, *SHEN Guang-xian*, *ZHANG Lian-dong* *LI Ming*
(Rolling Mills Research Institute of Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: Mill Roller bearing is made up of internal ring, middle rolls and external ring, which belongs to multi-bodies contact problem. So it is rather difficult and complex to analyze load peculiarities of mill roller bearing directly. In this paper, based on three-dimensional elastic contact BEM, it is introduced that middle rolling bodies can be described as plate units, placed on the internal ring, therefore the contact problem can be changed from multi-bodies to two-bodies. As the elastic deformation of plate unit, it can be calculated by Hertz contact formula and is regarded as a gap to be substituted to the total matrix equality, so the three dimensional distribution of load peculiarities of mill roller bearing can be achieved. The calculating model of this method is visualized and simple, and has higher accuracy, therefore it become effective numerical method to design and analyze load peculiarities of mill roller bearing.

Key words: mill roller bearing; load characteristics; plate unit; boundary element method