

①

文章编号: 1006-7329(2000)06-0058-04

洞室

58-61

# 含空洞无限平面奇异解与有限元耦合 分析地下工程问题

唐寿高, 曹志远

(同济大学 工程力学与技术系 固体力学教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘要:**提出一种简单直接的耦合方法,即含有空洞的无限平面奇异解与有限元耦合来求解无限平面问题。地下工程算例表明,本方法正确反映了人工边界外无限域对边界内结构的弹性效应。

**关键词:**奇异解;有限元;耦合;岩土损伤

**中图分类号:**O316

**文献标识码:**A

用有限元分析无限域力学问题,常用的方法是取一足够大的人工边界,忽略该人工边界以外区域的弹性性质,而仅对人工边界内部区域进行有限元网格划分并将人工边界作为固定边界条件来处理。为了提高精度,可采用边界元与有限元耦合法求解<sup>[1]</sup>。本文提出一种更为简单直接的耦合方法,即将该人工边界以外的区域看成一含空洞的弹性无限平面问题,设该人工边界(即空洞边界)上分布有  $m$  个结点(与内部区域有限单元在该人工边界上的结点相一致),通过分析该无限域空洞边界上的奇异解,求得含空洞无限平面关于洞边  $m$  个结点的刚度阵,再将此刚度阵的元素叠加到人工边界内结构有限元总刚度阵中相应位置上去,然后按一般有限元法求解。计算表明,本方法正确反映了人工边界外无限域对边界内结构的弹性效应,改进了纯有限元法分析此类问题因人工边界而带来的误差。

## 1 含空洞无限平面奇异解

应用数学弹性力学理论,可得含有单空洞的无限平面奇异解为<sup>[2,3]</sup>:

$$\varphi(z, z_p) = - (1 + \nu) / (8\pi) (X + iY) \ln(z - z_p) + \varphi_0(z, \bar{z}_p) \quad (1)$$

$$\psi_0(z, z_p) = 1 / (8\pi) [(3 - 4\nu)(X - iY) \ln(z - z_p) + (1 + \nu)(X + iY) \bar{z}_p / (z - z_p)] + \psi_0(z, \bar{z}_p)$$

其中  $z_p$  为洞边荷载作用点(源点),  $\varphi_0(z, \bar{z}_p)$  和  $\psi_0(z, \bar{z}_p)$  是关于洞边(为满足该边边界条件)的映射函数,不难求得为:

$$\varphi_0(z, z_p) = - A_l \ln(z_p - z) + A_l \ln z$$

$$\psi_0(z, z_p) = - A_l \{ \ln(z_p - z) + \ln z - (3 - \nu)R^2/z^2 - R^2/[z(z_p - z)] \} \quad (2)$$

式中  $A_l = (X + iY) / (8\pi)$ 。

## 2 含空洞无限平面刚度阵

在源点  $z_p$  作用单位集中,在场点  $z$  产生的位移可用上述奇异解表示为

\* 收稿日期: 2000-05-01

基金项目: 上海市固体力学重点学科研究项目

作者简介: 唐寿高(1952-),男,上海人,同济大学教授、博士,主要从事结构工程与岩土工程分析的计算机方法研究。

$$\begin{aligned} u_i &= \operatorname{Re}[(3-4\nu)\overline{\varphi(z, z_p)} - z\overline{\phi_l(z, z_p)} - \phi_l(z, z_p)]/2G \\ v_i &= -\operatorname{Im}[(3-4\nu)\overline{\varphi(z, z_p)} - z\overline{\phi_l(z, z_p)} - \phi_l(z, z_p)]/2G \end{aligned} \quad (3)$$

式中( )'为关于场点的导数;  $G$  为材料剪切模量; 下标  $l$  表示源点力的作用方向, 等于1表示  $X=1, Y=0$ , 等于2表示  $X=0, Y=1$ .

若在洞边布置  $n$  个边界结点, 这些结点与洞内结构有限元相应结点重合. 由结构力学中柔度阵的定义, 可由式(3)求得含空洞无限平面结构的总柔度阵各元素, 并集成总柔度阵为

$$[R]_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中  $[R_{ij}]$  为  $2 \times 2$  子阵, 即

$$[R_{ij}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}_{ij} \quad (5)$$

其元素可由式(3)求得:

$$r_{11} = u_1, r_{12} = u_2, r_{21} = v_1, r_{22} = v_2$$

对式(4)求逆, 即得相应的刚度阵为

$$[K^0]_{2n \times 2n} = [R]^{-1} \quad (6)$$

式中  $[K_{ij}]$  仍为  $2 \times 2$  子阵. 式(6)即为含空洞无限平面关于洞边结点的刚度矩阵.

### 3 奇异解与有限元耦合方法

设一圆域半径为  $r$  同上述空洞半径. 对圆域结构进行二维有限元网格划分后(设共有  $m$  个结点), 得到总刚度阵为

$$[K]_{2m \times 2m} \quad (7)$$

式(6)中空洞边结点是顺时针向按顺序编码, 而式(7)关于有限元结点编号是按有限元离散结构整体考虑的. 后者在圆域边界上的结点号与前者的洞边结点编码一一对应, 按这种对应关系可将式(6)中的刚度元素逐一叠加到有限元总刚度阵(7)中去, 然后按常规有限元处理.

本方法的特点是较精确地反映了人工边界外无限域对内部区域的影响, 并且不增加有限元计算工作量. 耦合求解的程序仅需对有限元程序略作修改即可得到. 具体是在有限元形成总刚度阵的执行语句后面插入一判别句(即是否耦合求解)然后插入一调用做上述关于含空洞无限平面问题工作的子程序语句, 该子程序单独编制, 与有限元程序无关.

### 4 地下洞室岩土损伤力学问题算例

现以地下洞室岩土损伤力学问题为例来给出本文方法的应用.

#### 4.1 岩土损伤力学模型<sup>[4]</sup>

考虑到岩石材料的各向异性特性, 其损伤张量可定义为

$$\underline{D} = \underline{I} - \underline{E}\underline{E}^{-1} \quad (8)$$

式中  $\underline{I}$ ,  $\underline{E}$  和  $\underline{E}^{-1}$  分别为单位张量, 岩石损伤状态张量和无损状态弹性系数张量. 对于二维问题, 如将破碎带介质中的碎块视为颗粒并且排列为规则类, 则有两组裂隙, 其损伤张量为

$$\underline{D} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{S_i} (N_{i1} N_{i2} L_{i1} L_{i2})^{1/2} (\underline{n}_i \otimes \underline{n}_i) \quad (9)$$

式中 $n_i$ 为第 $i$ 组裂隙面法向单位矢量; $S_i$ 为第 $i$ 组裂隙的间距; $L_{1i}$ 、 $L_{2i}$ 分别是第 $i$ 组裂隙在节理的两个面上所有迹线的平均长度, $N_{1i}$ 和 $N_{2i}$ 则是该两个面上的迹线数,它们均可查表获得<sup>[4]</sup>。

具体计算时,先由岩土损伤材料的物理常数及损伤特征由(9)式求的损伤张量,再根据材料的完态弹性常数由下式求的材料的弹性系数张量

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中 $\lambda$ 和 $\mu$ 为拉梅常数。然后用(9)式即可求得岩土损伤状态下的弹性张量。

4.2 算例

图1示为地下洞室岩土损伤力学问题,岩土颗粒体半径 $R=0.1\text{m}$ 且密度为 $2500\text{kg/m}^3$ ,泊松比 $\nu=0.25$ ,剪切模量 $G=0.8 \times 10^5\text{kgf/cm}^2$ , $n_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ , $n_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ 。据此按上述公式和方法求的岩土损伤状态下的弹性系数张量

$$\underline{E} = (\underline{I} - \underline{D})\underline{E} = \begin{bmatrix} 1.38 & 0.462 & 0 \\ 0.462 & 2.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.462 \end{bmatrix} \times 10^5\text{kgf/cm}^2$$

取半径为 $r=5a$ 的人工边界内圆域作为有限元损伤区域,圆域外则为含空洞无限域。考虑对称性后在半个圆域内划分了296个三角形三结点单元,在半圆域边上有15个结点。表1给出了分别用有限元和本文耦合方法所求得的应力分量。结果比较可见,由于考虑了无限域的弹性性质,本文方法在洞室近处求得应力分量比纯有限元所得结果为小,乃十分合理。表2给出的位移分量本文方法结果略大,又是在意料之中的,从而证明了本文耦合方法是有效而可行的。

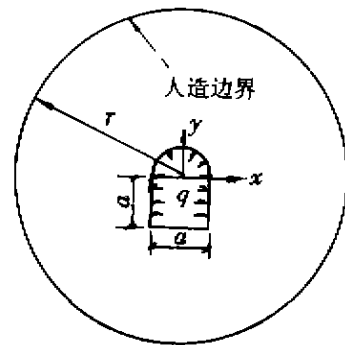


图1 地下洞室岩土损伤力学问题

表1 岩土损伤分析的本文耦合解与纯有限元结果比较

坐标(a)	$\sigma_x(q)$		$\sigma_y(q)$		$\tau_{xy}(q)$	
	本文耦合解	纯有限元	本文耦合解	纯有限元	本文耦合解	纯有限元
0.55, -1	1.159 2	1.179 4	1.090 1	1.437 9	1.297 6	1.739 3
0.70, -1	0.257 7	0.264 7	0.325 8	0.348 3	0.613 2	0.639 2
1.0, -1	-0.051	-0.055 2	0.090 0	0.093 1	0.365 1	0.392 5
4.0, -1	-0.045	-0.046 7	0.027 8	0.027 9	0.017 8	0.018 2
0.54, -1.04	1.510 0	1.861 0	1.384 8	1.600 1	0.450 6	0.451 2
0.64, -1.14	0.420 5	0.545 4	0.321 6	0.455 6	0.278 5	0.281 3
0.85, -1.35	0.105 8	0.154 7	0.065 7	0.069 9	0.188 3	0.189 9
2.98, -3.5	0.009 9	0.009 7	-0.005 5	-0.006 1	0.025 0	0.025 7
0.0, 0.55	1.115 3	1.204 2	-0.547 3	-0.780 9	-	-
0.0, 1.0	0.283 2	0.409 6	-0.166 1	-0.185 5	-	-
0.0, 4.0	0.028 8	0.029 1	-0.009 4	-0.011 5	-	-

表2 本文耦合解与纯有限元解在对称面上的竖向位移比较( $10^{-5}M$ )

计算方法	坐 标					
	(0.0, 0.55)	(0.0, 0.6)	(0.0, 0.7)	(0.0, 1.0)	(0.0, 2.5)	(0.0, 4.0)
本文耦合解	0.306 6	0.279 0	0.234 5	0.160 2	0.066 4	0.041 6
纯有限元解	0.289 3	0.265 1	0.225 4	0.155 6	0.067 0	0.044 7

**参考文献:**

- [1] 杜庆华,姚振汉.我国工程中边界元法研究的十年[J].力学与实践,1989,11(1):3~7
- [2] 吴家龙.弹性力学[M].上海:同济大学出版社,1993
- [3] 唐寿高,曹志远.半无限及含孔无限平面在各种边界条件下的复位势基本解[J].应用数学和力学,1998,19(4):311~319
- [4] 支国华.岩体的节理裂隙及断层对爆破地震波传播影响的动力分析[D].上海:同济大学,1994

## **A Method Coupling FEM and Singular Solution of Infinite Plane with a Hole for Underground Engineering**

*TANG Shou-gao, CAO Zhi-yuan*

(Dept. of Engineering Mechanics and Technology, Key Laboratory of Solid Mechanics of MOE, Tongji University, Shanghai 200092)

**Abstract:** In this paper, a simpler and direct coupling method, i. e. finite element method coupled with singular solution of infinite plane with a hole, is proposed for the analysis of underground engineering. The numerical example shows that the elastic effectiveness of the infinite plane outside the artificial boundary upon the inside region is exactly expressed.

**Keywords:** singular solution; finite element method; coupling; rock damage