

# 弹性薄板小挠度弯曲内力的 DRM 边界元解法

62-66

王文青, 嵇醒 0343

(同济大学 工程力学与技术系, 上海 200092)

**摘要:** 当用一般的边界元方法解弹性薄板弯曲问题时, 域内积分及计算内力时的高阶奇异性是不可避免的。本文应用 DRM (Dual Reciprocity Methods) 的原理, 提出了一种新的解决薄板弯曲问题的边界元方法, 并对薄板应力进行了近似计算。所提方法有效地避免了域内积分及高阶奇异性, 适合不同的边界条件, 具有一定的精度和易用性。

**关键词:** 边界元法; 弹性薄板; DRM 挠度弯曲

**中图分类号:** O343 文献标识码: A

用边界元方法解薄板弯曲问题时, 一般都要在控制域内划分单元且边界上内力的计算带有复杂的高阶奇异性<sup>[1]</sup>。当边界的形状及边界条件比较复杂时, 内力的计算就变得更加困难。DRM 边界元法 (Dual Reciprocity boundary element methods) 中的近似函数方法成功地解决了许多非线性及动力问题<sup>[2]</sup>。基于 DRM 的原理, 本文提出了计算薄板的  $w$  弯曲挠度及内力的方法。最后给出了计算算例。本方法完全避免了奇异项的计算。其所用基本未知量全部为场变量, 有效地利用了边界元法所有边界场变量具有同阶精度的优点。

## 1 数学描述

弹性薄板小挠度问题的控制方程为<sup>[3]</sup>:

$$\nabla^4 w(x, y) = g/D, (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

其中  $\nabla^2$  为 Laplace 算子;  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ , 为抗弯刚度,  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比;  $\Omega$  为薄板所占有的二维平面区域;  $w(x, y)$  为薄板的挠度;  $g$  为载荷。

弯矩  $M_x, M_y$ ; 扭矩  $M_{xy}$ ; 及剪力  $Q_x, Q_y$  的表达形式见参考文献[3], 边界条件为:

$$\xi_1 w + \xi_2 V(w) = \xi_3, \quad \zeta_1 w_{,n} + \zeta_2 M(w) = \zeta_3 \quad (2)$$

其中  $M(w), V(w)$  为弯矩和等效剪力,  $\xi_i(s) (i=1, 3)$  和  $\zeta_i(s) (i=1, 3)$  为薄板边界曲线弧长的函数。

## 2 弹性薄板弯曲问题的 DRM 边界元解法

弹性薄板弯曲问题的 DRM 边界积分方程为

$$c_i w(P) = \iint_{\Omega} u^* g/D dA - \oint_{\partial\Omega} (u^* w_{,nn} n_i - u_{,n}^* w_{,in} n_j + u_{,j} w_{,in} - u_{,jn}^* w_{,i}) ds \quad (3)$$

其中,  $c_i$  为一常数。当  $P$  点在积分域内时,  $c_i = 1$ ; 当  $P$  点在边界上时,  $c_i$  的值与积分域边界的形状有关。引入下列记号<sup>[4]</sup>:

$$\Omega = w, \quad X = w_{,nn}, \quad \Phi = w_{,in}, \quad \Psi = w_{,in} n_j \quad (4)$$

式(3)可写为如下形式

收稿日期: 2000-05-01

作者简介: 王文青(1961-), 男, 陕西人, 讲师, 博士, 主要从事计算力学研究。

$$c_k w'(P) = \oint_{\partial\Omega} u^* g/D dA - \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} (\Lambda_1 \Omega + \Lambda_2 X + \Lambda_3 \Phi + \Lambda_4) ds \quad (5)$$

其中

$$\Lambda_1 = -\frac{\cos\varphi}{r}, \Lambda_2 = \ln r + 1, \Lambda_3 = -\frac{1}{4}(2r \ln r + r) \cos\varphi, \Lambda_4 = \frac{1}{4} r^2 \ln r, \varphi = \bar{r} \cdot \bar{n}/r \quad (6)$$

在一般的边界元方法中,对式(5)中的域内积分的处理是引进域内单元,过程比较繁杂。现按 DRM 的原理,研究完善地解决这一问题的方法。

对(5)中的域内积分项  $g/D$  引进近似表达式:

$$g/D \approx \sum_{i=1}^{N+L} a_i b_i(x, y) \quad (7)$$

其中,  $N$  为边界单元上的节点个数,  $L$  为内点的个数。近似函数  $b_i(x, y)$  满足

$$\nabla^4 \tilde{w}_i = b_i \quad (8)$$

从而(5)中的域内积分项变为

$$\oint_{\partial\Omega} u^* g/D dA \approx \sum_{k=1}^{N+L} a_k \oint_{\partial\Omega} u^* \nabla^4 \tilde{w}_k = \sum_{k=1}^{N+L} a_k \left\{ \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} (\Lambda_1 \tilde{\Omega}_k + \Lambda_2 \tilde{X}_k + \Lambda_3 \tilde{\Phi}_k + \Lambda_4 \tilde{\Psi}_k) ds + c_k \tilde{w}_k \right\} \quad (9)$$

其中

$$\tilde{\Omega}_k = \tilde{w}_k, \tilde{X}_k = \tilde{w}_{k,n}, \tilde{\Phi}_k = \tilde{w}_{k,u}, \tilde{\Psi}_k = \tilde{w}_{k,ij,n} \quad (10)$$

最后,挠度  $w$  的 DRM 方程表达为

$$c_k w'(P) \approx \sum_{k=1}^{N+L} a_k \left\{ \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} (\Lambda_1 \tilde{\Omega}_k + \Lambda_2 \tilde{X}_k + \Lambda_3 \tilde{\Phi}_k + \Lambda_4 \tilde{\Psi}_k) ds + c_k \tilde{w}_k \right\} - \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} (\Lambda_1 \Omega + \Lambda_2 X + \Lambda_3 \Phi + \Lambda_4 \Psi) ds \quad (11)$$

当  $P$  点在边界上时有下二式:

$$\pi \Omega = \pi w \approx \sum_{k=1}^{N+L} a_k \left[ \oint_{\partial\Omega} (\Lambda_1 \tilde{\Omega}_k + \Lambda_2 \tilde{X}_k + \Lambda_3 \tilde{\Phi}_k + \Lambda_4 \tilde{\Psi}_k) ds + \pi \tilde{\Omega}_k \right] - \oint_{\partial\Omega} (\Lambda_1 \Omega + \Lambda_2 X + \Lambda_3 \Phi + \Lambda_4 \Psi) ds \quad (12)$$

$$\pi \Phi = \pi w_{,u} = \sum_{k=1}^{N+L} a_k \left[ \oint_{\partial\Omega} (\Lambda_1 \tilde{\Phi}_k + \Lambda_2 \tilde{\Psi}_k) ds + \pi \tilde{\Phi}_k \right] - \oint_{\partial\Omega} (\Lambda_3 \Phi + \Lambda_4 \Psi) ds \quad (13)$$

## 2.1 边界条件

引入记号(4)后边界条件(2)可表达为

$$\xi_1 \Omega - D \xi_2 \left[ \Psi - (v-1) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial X}{\partial s} - \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right) \right] = \xi_3 \quad (14a)$$

$$\zeta_1 X - D \zeta_2 \left[ \Phi + (v-1) \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} + \kappa X \right) \right] = \zeta_3 \quad (14b)$$

## 2.2 系统方程的形成

不失一般性,在以下计算推导中采用了常单元。在边界划分为  $NE$  个单元后,式(12)和(13)变为

$$\sum_{j=1}^{NE} [(A_{11})_{ij} \Omega_j + (A_{12})_{ij} X_j + (A_{13})_{ij} \Phi_j + (A_{14})_{ij} \Psi_j] = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{k=1}^{N+L} a_k [(A_{11})_{ij} \tilde{\Omega}_{jk} + (A_{12})_{ij} \tilde{X}_{jk} + (A_{13})_{ij} \tilde{\Phi}_{jk} + (A_{14})_{ij} \tilde{\Psi}_{jk}] \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{NE} [(A_{11})_{ij} \Phi_j + (A_{12})_{ij} \Psi_j] = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{k=1}^{N+L} a_k [(A_{11})_{ij} \tilde{\Phi}_{jk} + (A_{12})_{ij} \tilde{\Psi}_{jk}] \quad (16)$$

边界条件(14a, b)变为

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} (A_{31})_{ij} \Omega_j + \sum_{j=i-1}^{i+1} (A_{32})_{ij} X_j + (A_{34})_{ij} \Psi_j = (B_3)_i \quad (17)$$

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} (A_{41})_{ij} \Omega_j + (A_{42})_{ij} X_j + (A_{43})_{ij} \Phi_j = (B_4)_{ij} \quad (18)$$

$i, j=1, 2, 3, \dots, N$ 。将上四式写为矩阵的形式

$$AU = \tilde{A}Ua + B \quad (19)$$

式(15)至(19)中的符号定义参见参考文献[6]。

在式(19)中的插值系数  $a$  还是未知向量。为此,有必要从近似表达式(7)开始进行研究。将(7)式遍历  $N+L$  个边界单元节点和内点后

$$g(p_i)/D = \sum_{k=1}^{N+L} a_k b_k(p_i, q_k) \quad (20)$$

将上两式遍历  $N+L$  个边界单元节点和内点并写成矩阵形式后有

$$\rho = Va \quad (21)$$

上式求逆得出插值系数  $a$  的插值表达式

$$a = V^{-1}\rho \quad (22)$$

其中,  $\rho$  为  $g(p_i)/D$  的函数。从而,插值系数  $a$  被表达为未知量  $w$  的函数。将(22)式代入式(19)有

$$AU = \tilde{A}UV^{-1}\rho + B \quad (23)$$

上式即为 DRM 边界元法的基本系统方程。从式(19)可看出边界条件已直接作为系统方程的一部分,无需移项处理。

从上面推导过程可看出,本文的边界元法计算式不包含任何域内积分。

### 2.3 内力的近似计算方法

对于内力,常规的处理方法会在边界上产生高阶奇异积分。处理这些奇异积分是比较繁琐的。本文根据 DRM 的原理引入下列近似表达式:

$$w(p) = \sum_{k=1}^{N+L} d_k w(p, q_k) \quad (24)$$

将上两式遍历  $N+L$  个边界单元节点和内点并写成矩阵形式后有

$$w = \bar{D}w \quad (25)$$

对上式求二阶微分,有

$$w_{,xx} = \bar{D}_{,xx}w, w_{,xy} = \bar{D}_{,xy}w, w_{,yy} = \bar{D}_{,yy}w \quad (26)$$

对(25)求逆,有

$$w = \bar{D}^{-1}w \quad (27)$$

将上式代入(26)式得

$$w_{,xx} = \bar{D}_{,xx}\bar{D}^{-1}w, w_{,xy} = \bar{D}_{,xy}\bar{D}^{-1}w, w_{,yy} = \bar{D}_{,yy}\bar{D}^{-1}w \quad (28)$$

上式为线性插值,没有任何奇异性,而且此近似表达适用于边界点和内点。这样根据内力的定义及式(28)可求得弯矩的值,完全避免了用普通边界元法解板的弯曲问题的内力计算(尤其是求边界上的内力)时所遇到的高阶奇异积分。剪力的计算与此类似,这里不在赘述。

## 3 算例

为验证本文所提理论的正确性及计算效率,给一计算实例。其中所用物理量为无量纲形式。 $l_1=1, l_2=1, l_3=0, l_4=0, m_1=1, m_2=-1, m_3=1, m_4=-1$ 。

**算例:**模型为一受均匀压力  $p=10$  的圆板。分别考虑其边界固支及简支的情形。板的几何尺寸与材料常数为:直径  $a=50$ ,厚度  $h=1$ ,泊松比  $\nu=0.3$ ,弹性模量  $E=0.6250E+07$

计算模型共取40个边界单元及17个内点(图2)。

计算所得的最大挠度与精确解<sup>[3]</sup>之比见表1,计算所得内力与精确解<sup>[3]</sup>之比见表2(A,B)。误差

在5%之内,符合工程要求。

表1 最大挠度之比较

类 型	精确解	计算值
固 支	1.706 38	0.169 7 E+01
简 支	6.956 79	0.685 6E+01

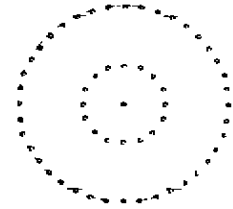


图2 计算模型

计算结果显示此方法用很少的内点进行插值近似就完全能达到工程要求,方法是可行的。而且最显著的是在边界点上的计算效果也是一样的好。这样一来,完全避免了用边界元法解板的弯曲问题的内力计算(尤其是求边界上的内力)时所遇到的高阶奇异积分。

表2A 固支情形下的内力

点	坐 标		弯矩 $M_x$		扭矩 $M_{xy}$		弯矩 $M_y$	
	X	Y	计算值	精确解	计算值	精确解	计算值	精确解
{	48.470	11.640	-2 983.0	-2 975.0	-494.7	-493.7	-1 041.0	-1 038.0
	46.050	19.080	-2 783.0	-2 775.0	-770.5	-768.8	-1 242.0	-1 238.0
	37.900	32.370	-2 183.0	-2 176.0	-1 076.0	-1 073.0	-1 842.0	-1 836.0
	32.370	37.900	-1 842.0	-1 836.0	-1 076.0	-1 073.0	-2 183.0	-2 176.0
	11.640	48.470	-1 041.0	-1 038.0	-494.7	-493.7	-2 983.0	-2 975.0
{	20.000	0.000	1 216.0	1 206.0	0.0	0.0	1 551.0	1 556.0
	18.480	7.654	1 265.0	1 258.0	-118.8	-123.7	1 502.0	1 505.0
	7.654	18.480	1 502.0	1 505.0	-118.8	-123.7	1 265.0	1 258.0
	0.000	20.000	1 551.0	1 556.0	0.0	0.0	1 216.0	1 206.0

表2B 简支情形下的内力

点	坐 标		弯矩 $M_x$		扭矩 $M_{xy}$		弯矩 $M_y$	
	X	Y	计算值	精确解	计算值	精确解	计算值	精确解
{	48.470	11.640	141.6	149.8	-490.5	-493.7	2 067.0	2 087.0
	46.050	19.080	340.3	350.2	-764.0	-768.8	1 868.0	1 887.0
	37.900	32.370	935.2	949.4	-1 067.0	-1 073.0	1 273.0	1 289.0
	32.370	37.900	1 273.0	1 289.0	-1 067.0	-1 073.0	935.2	949.4
	11.640	48.470	2 067.0	2 087.0	-490.5	-493.7	141.6	149.8
{	20.000	0.000	4 307.0	4 331.0	0.0	0.0	4 637.0	4 681.0
	18.480	7.654	4 356.0	4 383.0	-118.5	-123.7	4 589.0	4 630.0
	7.654	18.480	4 589.0	4 630.0	-118.5	-123.7	4 356.0	4 383.0
	0.000	20.000	4 637.0	4 681.0	0.0	0.0	4 307.0	4 331.0

## 5 结 语

本文对 DRM 边界元法(Dual Reciprocity boundary element methods)在弹性薄板小挠度问题中的应用作了详细地研究,克服完全避免了在控制域内划分单元及一般板的边界元法中所带有 的高阶奇异性。未知量全部为场变量,有效的利用了边界元法所有边界场变量具有同阶精度的优点。文中的算例采用了常单元,如果采用高阶单元和考虑了界单元的不连续性问题,此方法的求解效果会更突出。这一方法已成功地应用到板的非线性变形问题<sup>[6]</sup>。

## 参考文献:

- [1] Brebbia CA, Telles JCF and Wrobel LC. Boundary Element Techniques. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984

- [2] Partridge PW, Brabbia CA and Wrobel LC. The Dual Reciprocity Boundary Element Method. Computational Mechanics Publications, London, New York, 1992
- [3] 徐芝纶. 弹性力学. 第二版. 下册. 人民教育出版社. 1982
- [4] Katsikadelis JT & Nerantzaki. Large deflections of thin plates by boundary element method. Boundary Element X, Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston. 1985, 3: 435~456
- [5] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company, Inc, London, 1995
- [6] Wang Wenqing, Ji Xing and Tanaka M. A dual reciprocity boundary element approach for the problems of large deflection of thin elastic plates[J]. Computational Mechanics, 2000, 26: 58~65

## Dual Reciprocity Boundary Element Method for Bending of Linear Elastic Plates

*WANG Wen-qing, JI Xing*

(Dept. of Engineering Mechanics and Technology, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Based on the dual reciprocity method (DRM), a new boundary element approach for the deflection of the linear elastic plates was presented. The domain integrals and high singularity occurred in the conventional boundary element for the plate problems could be avoided thoroughly by using the present methods. Some numerical examples were given to show the accuracy and the efficiency of the present method.

**Keywords:** boundary element method; linear elastic plate; DRM