

17

文章编号:1006-7329(2000)06-0067-03

# 粘性液体小幅晃动常单元及线性元的分析比较\*

67-69

王小贞, 臧跃龙

0351.3

(福州大学 机械工程系, 福州 350002)

**摘要:**采用边界元法对容器中粘性、不可压缩液体小幅晃动进行数值分析。从二维线性化的 Navier-Stokes 方程出发, 推导了该问题分析的边界积分方程。结合边界条件建立了问题的一个边界元数值求解过程。数值处理过程中, 利用线性元对边界进行离散, 对角点进行了有效处理。数值结果与常单元的数值结果比较表明线性元的计算结果有更高的精度。

**关键词:**边界元法; 液体晃动

数学模型

文献标识码: A

中图分类号: 0351.3

液体晃动问题具有广泛的工程背景, 许多学者用有限元法, 边界元法及其它方法对该问题已作了大量研究。这些研究的不足之处在于或者对液体作了无粘性的假设, 或者仅在边界层考虑液体的粘性。

本文作者曾采用常单元对粘性液体晃动进行分析。图1是晃动的数学模型。当用常单元对边界进行离散时, 不存在角点问题, 但其收敛性较差。采用线性元, 角点处理的好坏是问题的关键, 如处理不当会直接影响数值结果的准确性。本文对角点问题进行了有效的处理, 获得了良好的计算结果。数值计算结果比较表明线性元有更高的精度和更好的收敛性。

## 1 问题的数学描述

二维线性化的 Navier-Stokes 方程如下<sup>[1]</sup>

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial x} \quad \nabla^2 V = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{\gamma} \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

式中,  $U, V$  为液体在  $x$  和  $y$  坐标方向的速度分量,  $P$  为液体内平均压力,  $\mu$  为液体粘性系数,  $\gamma$  为液体运动粘性系数,  $g$  为重力加速度,  $\Omega$  表示液体区域。坐标系  $Oxy$  如图1所示。

对于不可压缩液体, 液体运动还应满足下列连续性方程

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

由式(1)和(2), 可得方程

$$\nabla^2 P = 0 \quad (x, y) \in \Omega \quad (3)$$

对于稳态简谐运动, 速度分量和平均压力可表示为

$$U = \bar{U} e^{-i\omega t} \quad V = \bar{V} e^{-i\omega t} \quad P = -\rho g y + p e^{-i\omega t} \quad (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

式中  $\omega$  为系统运动角频率,  $\rho$  为液体密度。作如下代换

$$\bar{U} = u + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \bar{V} = v + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (x, y) \in \Omega \quad (5)$$

控制微分方程(1)和对应的边界条件成为

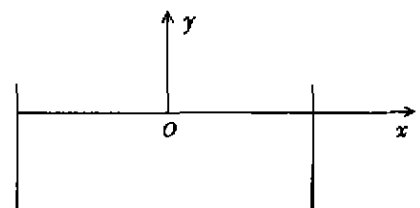


图1 问题的坐标系

\* 收稿日期: 2000-05-01

作者简介: 王小贞(1976-), 女, 江苏建湖人, 硕士生, 主要从事计算力学的研究。

$$\nabla^2 u + \frac{i\omega}{\gamma} u = 0 \quad \nabla^2 v + \frac{i\omega}{\gamma} v = 0 \quad (x, y) \in \Omega \quad (6)$$

$$-p + \frac{i\rho g}{\omega} v + \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial n} - 2\mu \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = 0 \quad (x, y) \in S_1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial S} - \frac{2}{i\omega\rho} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right) = 0 \quad (x, y) \in S_1 \quad (8)$$

$$u n_1 + v n_2 + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \bar{U}_0 n_1 + \bar{V}_0 n_2 \quad (x, y) \in S_2 \quad (9)$$

$$-u n_2 + v n_1 + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial S} = -\bar{U}_0 n_2 + \bar{V}_0 n_1 \quad (x, y) \in S_2 \quad (10)$$

式中  $\bar{U}_0$  和  $\bar{V}_0$  为容器壁与液体相接触点处容器质点的速度分量,  $\frac{\partial}{\partial n}$  表示边界上的法线方向导数,  $\frac{\partial}{\partial S}$  表示沿边界曲线弧长方向的导数,  $(n_1, n_2)$  为边界上的法线方向余弦,  $S_1$  为液体自由面,  $S_2$  为液体与容器的界面. 由公式(2)得:

$$-\frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (x, y) \in S_1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} n_1 - \frac{\partial u}{\partial S} n_2 + \frac{\partial v}{\partial n} n_2 + \frac{\partial v}{\partial S} n_1 = 0 \quad (x, y) \in S_2 \quad (12)$$

根据文献[2], 将控制微分方程(3)和(6)转化为下列边界积分方程:

$$\alpha(q) p(q) + \int_S \left[ \frac{\partial G_1(p, q)}{\partial n_p} p(p) - G_1(p, q) \frac{\partial p(p)}{\partial n_p} \right] dS_p = 0 \quad (13)$$

$$\alpha(q) u(q) + \int_S \left[ \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial n_p} u(p) - G_2(p, q) \frac{\partial u(p)}{\partial n_p} \right] dS_p = 0 \quad (14)$$

$$\alpha(q) v(q) + \int_S \left[ \frac{\partial G_2(p, q)}{\partial n_p} v(p) - G_2(p, q) \frac{\partial v(p)}{\partial n_p} \right] dS_p = 0 \quad (15)$$

式中  $G_1(p, q)$  为 Laplace 方程的基本解:  $G_1(p, q) = \ln \frac{1}{r}$ ,  $r = |r_p - r_q|$ , 式中  $r_p$  和  $r_q$  分别为场点  $p$  和  $q$  源点的坐标向径,  $\alpha(q)$  为基本解奇异性所产生的系数.

$G_2(p, q)$  为 Helmholtz 方程(6)的基本解<sup>[2]</sup>. 显然, 在边界上有六个未知量, 即  $u, v, p, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}, \frac{\partial p}{\partial n}$ , 有六个方程, 即(13), (14), (15), (7), (8), (9), (10), (11), (12).

## 2 数值计算

关于奇异单元积分的处理参见文献[4], 边界条件(7), (8), (9), (10), (11)和(12)中的  $\frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial^2}{\partial S^2}$  用五点有限差分法进行数值处理<sup>[2]</sup>.

角点的处理:  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_2, \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)_2$  采用坐标变换, 可写成

$$\left( \frac{\partial}{\partial n} \right)_2 = (n_1^2 n_1^2 + n_2^2 n_2^2) \left( \frac{\partial}{\partial n} \right)_1 + (n_1^2 n_2^2 - n_2^2 n_1^2) \left( \frac{\partial}{\partial S} \right)_1,$$

$\left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_2$  利用边界条件(9)代入. 这样处理减少了未知数, 且便于程序的控制.  $\left( \frac{\partial}{\partial n} \right), \left( \frac{\partial}{\partial S} \right)$  的下标1, 2分别表示面1, 面2(见图2)上的方向导数.

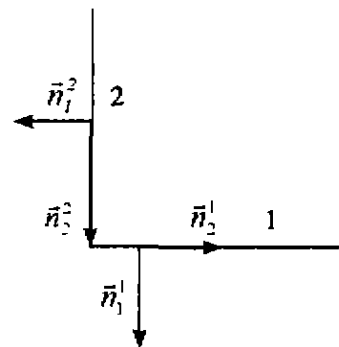


图2 沿边界面的局部坐标方向

### 3 算例及结论

对如图1所示的  $L=0.6095\text{ m}$ , 液体深  $H=0.06\text{ m}$  的二维晃动情况作数值计算, 液体粘度  $\mu=0.00094\text{ N}\cdot\text{S}/\text{m}^2$ , 密度  $\rho=1000\text{ kg}/\text{m}^3$ 。根据文献[2]的计算一阶共振频率为

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\pi g}{L} \tanh\left(\frac{\pi H}{L}\right)} = 3.893264007$$

计算结果见图3。

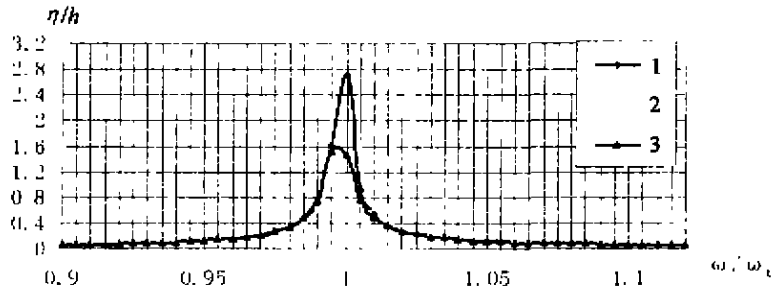


图3 对水平激励的最大振幅比较图

本文采用线性边界元对粘性液体小幅晃动进行的计算精度和更快的收敛性。

### 参考文献:

- [1] H. Lamb, Hydrodynamics, 6th Edition(M). Cambridge University Press, 1932
- [2] Y. Zang and X. Ji, A Boundary Element Method for Small-Amplitude, Viscous Fluid Sloshing in Couple with Structural Vibrations(J). International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2000, 32: 79~96
- [3] 申光宪等, 边界元法(M). 北京, 机械工业出版社, 1958
- [4] 臧跃龙, 嵇醒. 关于边界元法中奇异积分的处理(J). 固体力学学报, 1994, 15(2)

## Comparison of Constant and Linear BEM Analysis for Small Viscous Fluid Sloshing

WANG Xiao-zhen, ZANG Yue-long

(Dept. of Mechanical Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

**Abstract:** Linear boundary element method is used for the analysis of viscous fluid. The velocity components and the fluid mean pressure are taken as unknown functions. The comparison of linear BEM with constant BEM shows that the former presents much better precision and better convergence.

**Keywords:** BEM; fluid sloshing